

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 febbraio 1916.

P. BLASERNA, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle rappresentazioni normali uniformi degli spazi a curvatura costante.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI.

1 Abbiansi due spazî curvi S_n, S'_n a n dimensioni, dapprima qualunque, le cui metriche siano definite dalle rispettive espressioni dei loro ds^2 , e pensiamo eseguita una rappresentazione qualunque dell'uno sull'altro, sicchè avremo,

$$(1) \quad ds^2 = \sum_{i,k}^{1 \dots n} a_{ik} dx_i dx_k \dots \text{per } S_n$$

$$(1') \quad ds'^2 = \sum_{i,k}^{1 \dots n} a'_{ik} dx_i dx_k \dots \text{per } S'_n.$$

Le a_{ik}, a'_{ik} si suppongono qui funzioni finite e continue delle variabili $x_1, x_2, \dots x_n$, colle loro derivate fino a quell'ordine che occorre considerare; e si suppone, inoltre, che le forme differenziali quadratiche (1), (1') siano definite, positive. Il rapporto

$$(2) \quad \mu^2 = \frac{ds'^2}{ds^2} = \frac{\sum_{i,k}^{1 \dots n} a'_{ik} dx_i dx_k}{\sum_{i,k}^{1 \dots n} a_{ik} dx_i dx_k},$$

dà il quadrato del *modulo* μ di dilatazione lineare nella direzione corri-

spondente agli incrementi dx_i . I massimi e minimi di questo modulo μ corrispondono a quelle direzioni che soddisfanno al sistema lineare

$$(3) \quad \sum_{k=1}^{k=n} (a'_{ik} - \varrho a_i) dx_k = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

essendo ϱ una radice della equazione secolare

$$(4) \quad |a'_{ik} - \varrho a_i| = 0.$$

Questa ha le sue n radici $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$ sempre *reali e positive*, e, in generale, distinte. Vi corrispondono quindi n direzioni, che diciamo le *direzioni principali* della rappresentazione, e i corrispondenti valori di μ

$$\mu_1 = \sqrt{\varrho_1}, \mu_2 = \sqrt{\varrho_2}, \dots, \mu_n = \sqrt{\varrho_n}$$

che chiamiamo i *moduli principali*. Due direzioni principali corrispondenti a radici diverse sono ortogonali tanto rispetto alla metrica di S_n , quanto rispetto a quella di S'_n (¹). Così adunque in ogni punto di S_n (o di S'_n) abbiamo una n^{pla} *ortogonale* di direzioni principali, in generale perfettamente determinata. Indeterminazione si presenta quando l'equazione secolare (4) ha radici multiple; precisamente ad una radice r^{pla} corrispondono r direzioni principali linearmente indipendenti, o, se si vuole, uno spazio-lineare S_r di tali direzioni.

Se in un punto di S_n le direzioni delle linee coordinate $(x_1), (x_2), \dots, (x_n)$ sono quelle delle direzioni principali (ciò che è sempre lecito supporre), la (2) diventa semplicemente

$$\mu^2 = \mu_1^2 \xi_1^2 + \mu_2^2 \xi_2^2 + \dots + \mu_n^2 \xi_n^2,$$

dove $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ sono i coseni degli angoli che la direzione generica considerata fa colle direzioni principali, ed è $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 = 1$. La legge di variazione del modulo μ , al variare della direzione, corrisponde a quella dei semidiametri della *quadrica indicatrice delle dilatazioni*:

$$(5) \quad \mu_1^2 X_1^2 + \mu_2^2 X_2^2 + \dots + \mu_n^2 X_n^2 = \text{cost}$$

2. Chiamiamo *congruenze principali* della rappresentazione le n congruenze di linee dell' S_n che seguono, in ogni loro punto, una delle direzioni principali. Appena il numero n delle dimensioni supera il 2, queste congruenze principali non sono in generale *normali* (non ammettono iper-

(¹) Se si indicano con dx_i, dx_i gli incrementi corrispondenti a quelle due direzioni, sussistono invero le due relazioni

$$\sum_{ik} a_{ik} dx_i dx_k = 0, \quad \sum_{ik} a'_{ik} dx_i dx_k = 0.$$

superficie ortogonali), ed è quindi impossibile costruire in S_n un sistema n^{plo} di ipersuperficie (ortogonali) che si seghino lungo le congruenze principali. Ma se questo è possibile per la rappresentazione di S'_n sopra S_n , la proprietà ha pur luogo manifestamente nella rappresentazione (inversa) di S_n sopra S'_n ; allora diciamo, per abbreviare, che la rappresentazione è *normale*.

Diremo poi *uniforme* la rappresentazione quando i moduli di dilatazione principali $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_n$ siano costanti in tutto lo spazio (o regione di spazio). In questo caso l'equazione secolare (4) avrà le radici costanti, e quindi, in particolare, sarà costante il rapporto dei due discriminanti delle forme differenziali (1), (1'); onde segue: *ogni rappresentazione uniforme conserva in particolare la proporzionalità tra i volumi (ipervolumi) corrispondenti.*

3. Premesse queste generalità, veniamo all'oggetto della presente Nota, e, supposto che S_n, S'_n siano due spazii a curvature riemanniane costanti K, K' , domandiamo di risolvere il problema: *Trovare tutte le rappresentazioni normali ed uniformi dell'uno spazio sull'altro.* Tali rappresentazioni esistono effettivamente in grande arbitrarietà; la loro ricerca dipende dall'integrazione di un sistema simultaneo di equazioni a derivate parziali, il sistema (B) del seguente n. 4.

Riferiamo lo spazio S_n al sistema n^{plo} ortogonale $(u_1, u_2, \dots u_n)$ costituito, per ipotesi, dalle congruenze principali della rappresentazione; esia

$$(6) \quad ds^2 = H_1^2 du_1^2 + H_2^2 du_2^2 + \dots + H_n^2 du_n^2$$

la corrispondente forma del ds^2 . Scriviamo in primo luogo le condizioni affinchè questo ds^2 appartenga allo spazio di curvatura riemanniana costante K . Se introduciamo le rotazioni β_{ik} (Darboux), date da

$$\beta_{ik} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_k}{\partial u_i},$$

queste condizioni si esprimono col sistema differenziale seguente per le H_i e le β_{ik} (ved. le mie *Lezioni*, vol. I, pag. 75 e pag. 344):

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k & (i \neq k) \\ \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_l} = \beta_{il} \beta_{lk} & (i \neq k \neq l) \\ \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} + K H_i H_k = 0. \end{array} \right.$$

Qui i, k, l, \dots denotano indici *diversi* presi nella serie $1, 2, \dots n$; ed il

simbolo $\sum_{\lambda}^{(i,k)}$ significa che l'indice variabile λ di sommazione prende tutti i valori $1, 2, \dots, n$, eccettuati i due i, k . Viceversa, se le funzioni H_i, β_{ik} delle u verificano le (A), la (6) definisce, a meno di movimenti, un sistema n^{plo} ortogonale nello spazio S_n di curvatura riemanniana K costante.

4. Nella nostra ipotesi di una rappresentazione uniforme, pel corrispondente ds'^2 di S'_n , avremo

$$ds'^2 = \mu_1^2 H_1^2 du_1^2 + \mu_2^2 H_2^2 du_2^2 + \dots + \mu_n^2 H_n^2 du_n^2,$$

dove i moduli principali $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ saranno n costanti, che supporremo inoltre tutte *diseguali*. Indicando con accenti le quantità relative a S'_n ,abbiamo

$$H'_i = \mu_i H_i, \quad \beta'_{ik} = \frac{\mu_k}{\mu_i} \beta_{ik}.$$

Scrivendo che le H'_i, β'_{ik} debbono soddisfare al sistema (A), ove K sia cangiata in K' , vengono ad aggiungersi alle (A) le equazioni seguenti:

$$\frac{1}{\mu_i^2} \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} + \frac{1}{\mu_k^2} \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \frac{\beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k}}{\mu_{\lambda}^2} + K' H_i H_k = 0.$$

Combinando queste colle (A) della terza linea, possiamo risolvere rispetto a $\frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i}, \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k}$; e, ponendo

$$(7) \quad c_1 = \frac{1}{\mu_1^2}, \quad c_2 = \frac{1}{\mu_2^2}, \dots \quad c_n = \frac{1}{\mu_n^2},$$

troviamo così

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} = \sum_{\lambda}^{(i,k)} \frac{c_k - c_{\lambda}}{c_i - c_k} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} + \frac{K c_k - K'}{c_i - c_k} H_i H_k \\ \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial u_k} = \sum_{\lambda}^{(i,k)} \frac{c_i - c_{\lambda}}{c_k - c_i} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} + \frac{K c_i - K'}{c_k - c_i} H_i H_k; \end{array} \right.$$

ma la seconda di queste non è che la prima, scambiati gli indici i, k .

Il problema proposto è così ricondotto a riconoscere se ammette soluzioni il sistema differenziale

$$(B) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H_i}{\partial u_k} = \beta_{ki} H_k \\ \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} = \beta_{ii} \beta_{ik} \\ \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial u_i} = \sum_{\lambda}^{(i,k)} \frac{c_k - c_{\lambda}}{c_i - c_k} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} + \frac{K c_k - K'}{c_i - c_k} H_i H_k, \end{array} \right.$$

e quale arbitrarietà resta nell'integrale generale.

In questa ricerca possiamo prescindere dal fatto che, per avere soluzioni reali del problema delle rappresentazioni uniformi, occorre, per le (7), attribuire valori *positivi* (diseguali) alle costanti c_i ; basterrà qui supporre soltanto che le c siano costanti diseguali.

5. Se supponiamo in particolare $K = K' = 0$: se cioè cerchiamo le rappresentazioni normali uniformi dello spazio S_n euclideo, il sistema (B) viene a coincidere con quello già considerato in una mia Nota precedente ⁽¹⁾. Constatiamo che, anche nel caso di K, K' costanti qualunque, le *condizioni d'integrabilità* del sistema (B) rientrano nel sistema (B) stesso. Siccome questo è immediato per quelle che nascono dal confronto di due equazioni nella prima e nella seconda linea di (B), basterà considerare la seguente espressione Θ che risulta dal paragonare quelle della seconda con quelle della terza linea, e cioè

$$(8) \quad \Theta = \frac{\partial}{\partial u_i} (\beta_{il} \beta_{lk}) + \sum_{\lambda}^{(i,k)} \frac{c_{\lambda} - c_k}{c_i - c_k} \frac{\partial}{\partial u_l} (\beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k}) + \frac{K' - K c_k}{c_i - c_k} \frac{\partial}{\partial u_l} (H_i, H_k),$$

e sarà da provare che, in virtù delle (B) stesse, Θ si annulla. Decomponiamo Θ in due parti,

$$\Theta = \Phi + \Omega,$$

delle quali la prima Φ sia composta di tutti i termini non contenenti K, K' , che risultano nel secondo membro della (8) sviluppato colle (B), e l'altra Ω raccolga i termini rimanenti. Il calcolo, già eseguito nella Nota ora citata, dimostra che si ha $\Phi = 0$. D'altra parte l'espressione effettiva di Ω è

$$\begin{aligned} \Omega = & \beta_{lk} \frac{K c_l - K'}{c_i - c_l} H_i H_l + \\ & + \frac{c_l - c_k}{c_i - c_k} \left\{ \beta_{lk} \frac{K c_i - K'}{c_l - c_i} H_i H_l + \beta_{il} \frac{K c_k - K'}{c_l - c_k} H_k H_l \right\} + \\ & + \frac{K' - K c_k}{c_i - c_k} \left\{ \beta_{lk} H_i H_l + \beta_{il} H_k H_l \right\}; \end{aligned}$$

ora i due termini col fattore $\beta_{il} H_k H_l$ si elidono, e gli altri tre termini, col fattore $\beta_{lk} H_i H_l$, si distruggono pure, a causa della identità

$$(K c_l - K') (c_i - c_k) + (K c_i - K') (c_k - c_l) + (K c_k - K') (c_l - c_i) = 0.$$

Si ha dunque in effetto $\Omega = 0$, e, per ciò, anche $\Theta = 0$, c. d. d.

6. Le condizioni di integrabilità pel sistema (B) sono dunque identicamente soddisfatte. Esso ha d'altronde la forma lineare canonica del

(1) Questi Rendiconti, vol. XXIV (settembre 1915).

Bourlet ⁽¹⁾; anzi è nel caso, più semplice, del Darboux ⁽²⁾, non figurando derivate nei secondi membri. Ciascuna delle $n(n-1)+n=n^2$ funzioni incognite β_{ik} , H_i ha una sola variabile *parametrica*, le rimanenti $n-1$ principali: precisamente, per le β_{ik} la variabile parametrica è la u_k ; per la H_i è la u_i . Dai teoremi generali d'esistenza (cfr. Darboux, loc. cit., pag. 335) risulta che, fissato un sistema iniziale di valori per le u , sia per es. $(0, 0, \dots 0)$, esiste uno ed un solo sistema integrale tale che ciascuna funzione incognita β_{ik} , H_i si riduca ad una funzione *arbitraria* della sua variabile parametrica quando le altre $n-1$ (principali) si annullano; e queste funzioni arbitrarie sono soggette alla sola condizione di essere finite e continue ed ammettere rapporti incrementali finiti (condizioni di Lipschitz).

Il numero delle funzioni arbitrarie nell'integrale generale del sistema (B) sembra così dato da

$$n(n-1)+n=n^2;$$

però n di queste sono solo apparenti, dipendendo dall'arbitrarietà lasciata ai parametri u .

Se fissiamo p. es. questi parametri come gli archi delle curve coordinate $(u_1), (u_2), \dots (u_n)$ uscenti dal punto $(0, 0, \dots 0)$, tutte le H_i si ridurranno inizialmente all'unità. Concludiamo quindi:

Dati due spazi S_n, S'_n a n dimensioni, e di rispettive curvature riemanniane costanti K, K' , esistono infinite rappresentazioni normali ed uniformi dell'uno sull'altro. La loro ricerca dipende dall'integrazione del sistema (B), il cui integrale generale contiene $n(n-1)$ funzioni arbitrarie essenziali.

7. Un primo contributo all'integrazione del sistema (B) è portato dall'osservare la *esistenza di n integrali quadratici* per il sistema stesso.

Si considerino infatti le n espressioni $\Omega_1, \Omega_2, \dots \Omega_n$ definite da

$$\Omega_k = \sum_{\lambda}^{(i,k)} (c_{\lambda} - c_k) \beta_{\lambda k}^2 + (K' - K c_k) H_k^2 \quad (k = 1, 2, \dots n).$$

Se i è un qualunque indice diverso da k , derivando Ω_k rapporto ad u_i , ed osservando le (B), risulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \Omega_k}{\partial u_i} = & \sum_{\lambda}^{(i,k)} (c_{\lambda} - c_k) \beta_{ik} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} + \\ & + (c_i - c_k) \beta_{ik} \left\{ \sum_{\lambda}^{(i,k)} \frac{c_{\lambda} - c_k}{c_i - c_k} \beta_{\lambda i} \beta_{\lambda k} + \frac{K c_k - K'}{c_i - c_k} H_i H_k \right\} + \\ & + (K' - K c_k) \beta_{ik} H_i H_k, \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Sur les équations aux dérivées partielles simultanées (Annales de l'École normale sup., tome VIII, 3^{ème} sér.. Supplément.

⁽²⁾ Leçons sur les systèmes orthogonaux, 2^{ème} édition 1910, livre III, chap. I.

cioè identicamente $\frac{\partial \Omega_k}{\partial u_i} = 0$. Dunque Ω_k è funzione della sola u_k ; e poichè un cangiamento del parametro u_k ha per effetto di moltiplicare Ω_k per una funzione arbitraria di u_k , possiamo disporre di u_k , sì da rendere Ω_k costante. Ne concludiamo:

Il sistema differenziale (B) possiede (scelti convenientemente i parametri u_i) gli n integrali quadratici

$$(9) \quad \sum_{\lambda}^{(k)} (c_{\lambda} - c_k) \beta_{\lambda k}^2 + (K' - K c_k) H_k^2 = \text{cost} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

8. Come prima applicazione di questi risultati generali si consideri il caso $n = 2$, dove la condizione di normalità delle congruenze principali (n. 2) è sempre soddisfatta, ed il problema è quello di trovare le più generali rappresentazioni uniformi di due superficie colle curvature costanti K, K' l'una sull'altra.

Riprendendo qui le notazioni usuali, poniamo

$$u_1 = u, \quad u_2 = v \\ H_1 = \sqrt{E}, \quad H_2 = \sqrt{G},$$

indi

$$\beta_{12} = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}, \quad \beta_{21} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}.$$

Il sistema differenziale (B) si riduce, in tal caso, alle due equazioni

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) = \frac{K - K' \mu_2^2}{\mu_2^2 - \mu_1^2} \mu_1^2 \sqrt{EG} \\ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) = \frac{K - K' \mu_1^2}{\mu_1^2 - \mu_2^2} \mu_2^2 \sqrt{EG}, \end{array} \right.$$

è possiede i due integrali quadratici

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\mu_2^2 - \mu_1^2) \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right)^2 + (K' \mu_2^2 - K) \mu_1^2 G = \text{cost} \\ (\mu_1^2 - \mu_2^2) \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right)^2 + (K' \mu_1^2 - K) \mu_2^2 E = \text{cost}. \end{array} \right.$$

Prendiamo dapprima il caso più semplice $K = K' = 0$, dove si tratta delle rappresentazioni uniformi del piano sopra sè stesso. Le condizioni da soddisfarsi riducono, secondo le (11), alle due

$$\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = a, \quad \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = b,$$

con a, b costanti. Lasciamo da parte il caso in cui una almeno di queste due costanti è nulla: il che conduce ad una soluzione geometrica ovvia, in cui le linee di uno dei due sistemi sono rette. Nel caso generale, cambiando i parametri, possiamo fare $a = b = 1$; l'elemento lineare del piano prende la forma caratteristica

$$(12) \quad ds^2 = \theta^2 du^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial v}\right)^2 dv^2,$$

soddisfacendo θ all'equazione

$$(13) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \theta.$$

In effetto, anche l'elemento lineare

$$ds'^2 = \mu_1^2 \theta^2 du^2 + \mu_2^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial v}\right)^2 dv^2,$$

con μ_1, μ_2 moduli costanti arbitrarii, appartiene al piano. Dunque: *La ricerca delle rappresentazioni uniformi di un'area piana sopra un'altra area dipende dall'equazione del secondo ordine $s = z$.* Questa si sa integrare completamente per funzioni di Bessel (Du Bois-Reymond).

Geometricamente i sistemi ortogonali (u, v) che danno al ds^2 del piano la forma (12) sono *caratterizzati* dalla seguente proprietà: Ad ogni sistema (u, v) corrispondente alla (12), ne è associato un secondo pel quale si ha

$$(12_1) \quad ds_1^2 = \left(\frac{\partial \theta}{\partial u}\right)^2 du^2 + \theta^2 dv^2;$$

le linee $u = \text{cost}$ di (12) sono le evolute delle $u = \text{cost}$ in (12₁), e le $v = \text{cost}$ di (12₁) le evolute delle $v = \text{cost}$ in (12) ⁽¹⁾.

9. Sempre supponendo $n = 2$, facciamo in secondo luogo $K = K' = 1$, sicchè si tratterà ora delle rappresentazioni uniformi della sfera sopra sè stessa.

L'esame dei casi possibili nella integrazione del sistema (10) trovasi completamente eseguito in una mia recente Memoria ⁽²⁾. Qui ricordo che i corrispondenti sistemi sferici ortogonali (u, v) si ottengono dalle congruenze pseudosferiche reali (a fuochi reali od immaginari) nel modo seguente: *Della congruenza pseudosferica si prende l'immagine sferica, e le linee della sfera che corrispondono alle asintotiche delle due falde focali danno i richiesti sistemi ortogonali (u, v) .*

⁽¹⁾ Cfr. una mia Nota del 1891 nel vol VII, pag. 4, di questi Rendiconti.

⁽²⁾ *Sopra una classe di superficie collegate alle congruenze pseudosferiche* [Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tomo XL (1915)].

Aggiungiamo che, se i due moduli principali μ_1, μ_2 sono ambedue diversi dall'unità, la congruenza ha fuochi distinti (reali od immaginari); questi vengono a coincidere se $\mu_1 = 1$ (o $\mu_2 = 1$). In questo caso la congruenza consta delle tangenti alle asintotiche di un sistema in una (qualsunque) superficie pseudosferica; e il ds^2 della sfera prende la forma caratteristica

$$(14) \quad ds^2 = \left(\frac{\partial \omega}{\partial u} \right)^2 du^2 + \operatorname{sen}^2 \omega dv^2,$$

con ω soluzione della nota equazione del secondo ordine

$$(15) \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = \operatorname{sen} \omega.$$

Ancora da questa equazione, e dalle relative trasformazioni di Bäcklund, dipende la ricerca nel caso delle generali congruenze pseudosferiche; onde abbiamo: *Le rappresentazioni uniformi della sfera sopra sè stessa dipendono dalla equazione $s = \operatorname{sen} z$.* Un risultato del tutto analogo si troverebbe per la pseudosfera, col fare $K = K' = -1$.

10. Prendiamo il caso successivo $n = 3$; e supponiamo dapprima $K = K' = 0$, ciò che corrisponde alla ricerca delle *rappresentazioni normali ed uniformi dello spazio S_3 euclideo sopra sè stesso*. Queste dipendono da sei funzioni arbitrarie essenziali (n. 6); i sistemi tripli ortogonali determinati dalle congruenze principali della rappresentazione sono quelli già introdotti in una mia Nota dell'anno scorso ⁽¹⁾, e studiati poi ampiamente in un lavoro ora in corso di stampa nel vol. XXV degli Annali di matematica. I metodi di trasformazione ivi sviluppati permettono di costruire, senza calcoli d'integrazione, serie illimitate di tali sistemi.

Se prendiamo ora n qualunque, ma ancora $K = K' = 0$, si hanno i sistemi n^{pli} ortogonali dell' S_n euclideo di cui tratta la Nota già citata al n. 5. Se infine supponiamo K, K' costanti qualunque, si ottengono più in generale sistemi n^{pli} ortogonali dell' S_n a curvatura costante, e, per ciò, anche dell' S_n euclideo, il cui studio merita di essere approfondito.

11. Qui, ritornando alle rappresentazioni normali uniformi dell' S_3 euclideo, ne rileveremo due classi particolarmente semplici. La prima classe corrisponde al caso che nel relativo sistema triplo ortogonale una serie consti di superficie S parallele, e quindi le altre due costino delle sviluppabili luogo delle normali lungo le linee di curvatura. Queste superficie S hanno per immagine sferica delle loro linee di curvatura uno qualunque dei sistemi sferici ortogonali (u, v) considerati al n. 9; e, viceversa, ogni

⁽¹⁾ Vol. XXIV dei Rendiconti (maggio 1915).

tal superficie S , colle superficie parallele, dà luogo ad uno dei sistemi tripli ortogonali cercati.

Una seconda classe corrisponde a quei sistemi *ciclici* — considerati al § 278, vol. II delle *Lezioni* — nei quali gli assi dei circoli formano una congruenza di Ribaucour a superficie generatrice pseudosferica.

Le formule relative a questi sistemi ciclici si ottengono come segue: Sia ω una soluzione qualunque della (15), e sia $\varrho = \varrho(u, v)$ una soluzione della equazione per le deformazioni infinitesime delle superficie pseudosferiche:

$$(16) \quad \frac{\partial^2 \varrho}{\partial u \partial v} = \varrho \cos \omega.$$

Le formule della trasformazione di Bäcklund

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \frac{\partial(\omega' + \omega)}{\partial u} = \operatorname{tg} \sigma \operatorname{sen} \frac{\omega' - \omega}{2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial(\omega' - \omega)}{\partial v} = \operatorname{cot} \sigma \operatorname{sen} \frac{\omega' - \omega}{2} \end{array} \right. \quad (\sigma \text{ costante})$$

danno, integrate, una nuova soluzione ω' di (15), contenente una costante arbitraria w , che riguardiamo come terza variabile. Allora il ds^2 riferito al sistema ciclico (u, v, w) ha la forma

$$ds^2 = H_1^2 du^2 + H_2^2 dv^2 + H_3^2 dw^2,$$

con

$$H_1 = \cos \sigma \frac{\partial \varrho}{\partial u} + \varrho \operatorname{sen} \sigma \cos \frac{\omega' - \omega}{2}, \quad H_2 = \operatorname{sen} \sigma \frac{\partial \varrho}{\partial v} + \varrho \operatorname{cos} \sigma \cos \frac{\omega' - \omega}{2},$$

$$H_3 = \frac{1}{2} \varrho \operatorname{sen} \sigma \cos \sigma \frac{\partial \omega'}{\partial w}.$$

E se poniamo

$$ds'^2 = \mu_1^2 H_1^2 du^2 + \mu_2^2 H_2^2 dv^2 + \mu_3^2 H_3^2 dw^2,$$

legando i moduli costanti μ_1, μ_2, μ_3 con la relazione

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \sigma}{\mu_1^2} + \frac{\operatorname{cos}^2 \sigma}{\mu_2^2} = \frac{1}{\mu_3^2},$$

il nuovo elemento lineare ds'^2 appartiene ancora allo spazio euclideo, ed abbiamo così una delle rappresentazioni normali uniformi che si domandavano.

11. Nelle ricerche generali precedenti è essenziale l'ipotesi (n. 4) che i moduli principali siano costanti *distinte*. Esistono per altro rappresentazioni normali ed uniformi nelle quali questi moduli sono in parte eguali; ma la loro ricerca richiede una trattazione diversa. Se si cercano p. es. le

rappresentazioni normali ed uniformi dello spazio ordinario euclideo *sopra sé stesso* con due moduli di dilatazione principali eguali, si trova che ne esistono due sole classi. Una è fornita dai sistemi tripli ortogonali di cui una serie è costituita da piani; l'altra classe è data da superficie parallele in una serie ed aventi per immagine delle linee di curvatura un sistema sferico (14). Le superficie della serie parallela sono quindi superficie di Guichard, aventi per una delle falde dell'evoluta una superficie di Voss.

Ma se domandiamo invece le rappresentazioni normali ed uniformi dell' S_3 euclideo sopra un S'_3 a curvatura costante, vediamo che ogni sistema triplo ortogonale di Weingarten (*Lezioni*, vol. II, cap. XXVII) dà luogo ad una tale rappresentazione. Prendasi invero dapprima un sistema pseudo-sferico di Weingarten corrispondente alla nota forma del ds^2

$$(18) \quad ds = \cos^2 \omega \, du_1^2 + \sin^2 \omega \, du_2^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial u_3} \right)^2 du_3^2,$$

dove $\omega = \omega(u_1, u_2, u_3)$ soddisfa alle equazioni scritte a pag. 549 del vol. II delle *Lezioni*. Se a, b sono due costanti arbitrarie, l'elemento lineare

$$(18') \quad ds'^2 = a^2 (\cos^2 \omega \, du_1^2 + \sin^2 \omega \, du_2^2) + b^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial u_3} \right)^2 du_3^2$$

appartiene ad uno spazio S'_3 di curvatura costante $K' = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}$. Queste formole (18), (18') danno quindi una delle rappresentazioni richieste, con due moduli di dilatazione $= a$, il terzo $= b$. Similmente, nel caso dei sistemi di Weingarten a curvatura positiva, il cui ds^2 è dato da (loc. cit., pag. 551)

$$ds^2 = \operatorname{senh}^2 \theta \, du_1^2 + \operatorname{cosh}^2 \theta \, du_2^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial u_3} \right)^2 du_3^2,$$

si vede che l'altro

$$ds'^2 = a^2 (\operatorname{senh}^2 \theta \, du_1^2 + \operatorname{cosh}^2 \theta \, du_2^2) + b^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial u_3} \right)^2 du_3^2$$

appartiene allo spazio S'_3 di curvatura costante

$$K' = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}.$$

Sotto l'attuale punto di vista, i sistemi di Weingarten rientrano dunque nella classe generale di quei sistemi (tripli) ortogonali che si collegano al problema delle rappresentazioni normali ed uniformi.

Matematica. — *La risoluzione meccanica esatta delle equazioni differenziali lineari generali di 2° ordine.* Nota del Corrispondente E. PASCAL.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Le equazioni differenziali e l'integrazione delle trasformazioni.* Nota di GIULIO ANDREOLI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

In una precedente Nota ⁽¹⁾, abbiamo definito l'integrazione delle trasformazioni e mostrato la connessione di tale operazione con la teoria delle equazioni differenziali.

In questa mostreremo l'applicazione di tali concetti, ricavando degli speciali tipi di equazioni, e dedurremo alcune conseguenze d'indole generale.

1. Consideriamo il gruppo di trasformazioni lineari fratte

$$(1) \quad z_1 = \frac{az + b}{cz + 1} \quad (a, b, c \text{ qualunque}).$$

Conformemente a ciò che avevamo supposto nella precedente Nota, la sostituzione degenera $z_1 = 0$ si ottiene con la matrice di trasformazione $0 \equiv (0, 0, 0)$; la sostituzione identica invece ha la matrice $(a \ b \ c) \equiv (1 \ 0 \ 0)$.

Supponiamo perciò che le a, b, c, z, z_1 dipendano da una variabile x ed integriamo tale trasformazione fra i limiti x_0 ed x .

Per quanto è stato detto nella prima Nota, dovremo formare il prodotto delle sostituzioni aventi le matrici

$$(1 + h a(x_0 + mh), \ h b(x_0 + mh), \ h c(x_0 + mh)) \quad \left\{ \begin{array}{l} m = 0, \dots, n-1 \\ h = \frac{x - x_0}{n} \end{array} \right.$$

passando poi al limite per $n = \infty$.

Ciò che equivale a porre

$$(2) \quad z(x + h) = \frac{(1 + h a(x)) z(x) + h b(x)}{h c(x) \cdot z(x) + 1} = f(h, x, z)$$

e passare al limite per $h = 0$.

(1) Questi Rendiconti, vol. XXV, 1° sem. 1916.

Ora, se noi sviluppiamo la frazione in serie di Taylor rispetto ad h , troveremo che

$$z(x+h) = f(0) + h f'(0) + \varepsilon,$$

ove ε denota un infinitesimo d'ordine maggiore o eguale a due, ed $f(0)$ e $f'(0)$ sono la f e la sua derivata rispetto ad h , per $h=0$.

Eseguendo i calcoli, si trova

$$z(x+h) = z(x) + h \{ a(x) z(x) + b(x) - c(x) z^2 \} + \varepsilon;$$

da cui, portando $z(x)$ a sinistra, dividendo per h , e passando al limite per $h=0$, avremo

$$\frac{dz}{dx} = c(x) z^2 + a(x) z + b(x),$$

poichè $\lim \frac{\varepsilon}{h} = 0$.

E questa è appunto l'equazione di Riccati: *tutte le sue note proprietà dipendono semplicemente dal fatto che essa equivale all'integrazione di una trasformazione lineare fratta.*

Infatti, le trasformazioni (1) ammettono, come invariante assoluto, il birapporto

$$\frac{z' - z''}{z' - z^{IV}} \cdot \frac{z''' - z^V}{z''' - z''}.$$

Quindi, dalle (2) si ricava che il birapporto delle z nel punto x_0 è eguale a quello nel punto $x_0 + h, x_0 + 2h, \dots, x_0 + nh = x_1$; cioè ritroviamo la proprietà fondamentale e caratteristica dell'equazione di Riccati.

Notiamo poi anche che, introducendo variabili omogenee $z = \frac{\zeta}{\eta}$, le (1) ci danno

$$\begin{cases} \zeta_1 = \varrho(a\zeta + b\eta) \\ \eta_1 = \varrho(c\zeta + \eta) \end{cases} \quad (\varrho = \text{funz. arbit. di } x).$$

Come è noto, l'integrazione di queste trasformazioni lineari intere, ci conduce alle equazioni differenziali lineari; quindi, ponendo $z = \frac{\zeta}{\eta}$, nelle equazioni di Riccati dovremo trovare delle equazioni lineari.

Infatti, avremo

$$\frac{\zeta' \eta - \eta' \zeta}{\eta^2} = -\frac{c\zeta^2}{\eta^2} + \frac{a\zeta}{\eta} + b,$$

da cui, per $\eta \neq 0$, si trae

$$(\zeta' - b\eta + (k - a)\zeta) \eta - (\eta' - c\zeta + k\eta) \zeta = 0 \quad (k \text{ funz. arbit.})$$

che è soddisfatta da

$$\begin{aligned}\zeta' &= (a - k)\zeta + b\eta \\ \eta' &= \quad c\zeta - k\eta.\end{aligned}$$

Ricprocamente, si vede la ragione per cui il rapporto d'una coppia-soluzione del sistema ora scritto (il più generale del secondo ordine, come si vede) soddisfi all'equazione di Riccati.

2. In un modo perfettamente simile si possono ottenere nuovi tipi di equazioni, più generali, e godenti di proprietà simili.

Consideriamo il gruppo delle trasformazioni lineari fratte a due variabili (ciò che diremo si estende subito al caso di n), definito dalle

$$(3) \quad y_1 = \frac{ay + bz + c}{my + nz + p}, \quad z_1 = \frac{dy + cz + f}{my + nz + p};$$

il quale, con l'introduzione delle variabili omogenee $y = \frac{\eta}{\xi}$, $z = \frac{\zeta}{\xi}$, può ridursi al gruppo lineare omogeneo

$$(4) \quad \begin{cases} \eta_1 = (a\xi + b\zeta + c\xi)\varrho \\ \zeta_1 = (d\eta + e\zeta + f\xi)\varrho \\ \xi_1 = (m\eta + n\zeta + \xi)\varrho \end{cases} \quad (\varrho \text{ funz. arbit.})$$

Se ora consideriamo il caso che tutte le variabili sieno funzioni di x , e fissiamo le formole di trasformazione

$$(5) \quad \frac{(1 + h a(x))y(x) + h b z + h c}{h m y + h n z + 1}; \quad z(x + h) = \frac{h d y + (1 + h e)z + h f}{h m y + h n z + 1},$$

avremo che il prodotto (destro o sinistro) delle n trasformazioni ottenute ponendo $x = x_0 + mh$, $h = \frac{x_1 - x_0}{n}$, $m = 0, 1, \dots, n - 1$, per n tendente all'infinito, è l'integrale della trasformazione lineare fratta (3); ed il valore, che in x_1 assumono la y e la z , è precisamente il valore d'una coppia integrale d'una certa equazione differenziale.

Per trovare questa equazione, sviluppiamo i secondi membri delle (5) in serie di Taylor rispetto ad h ; avremo

$$\begin{aligned}y(x + h) &= y(x) + h \{ay + bz + c - y(my + nz)\} + \varepsilon' \\ z(x + h) &= z(x) + h \{dd + ez + f - z(my + nz)\} + \varepsilon''\end{aligned}$$

ove ε' , ε'' sono infinitesimi d'ordine superiore rispetto ad h .

Da queste formole, trasportando $y(x), z(x)$ a sinistra, dividendo per h e passando al limite, troviamo

$$(6) \quad \begin{cases} y'(x) = ay + bz + c - y(my + nz) \\ z'(x) = dy + ez + f - z(my + nz). \end{cases}$$

D'altra parte, notiamo che l'integrazione delle (4) ci porta ad un sistema d'equazioni differenziali lineari con le η, ζ, ξ , il più generale possibile. Quindi possiamo dire che

Date tre funzioni soddisfacenti ad un sistema lineare del 3^o ordine, il rapporto di due di esse alla terza soddisfa la (6), deducibile direttamente dal sistema lineare dato.

È agevole la verifica diretta di questa proprietà, simile a quella dell'equazione di Riccati.

3. Osserviamo che le (4) ammettono l'invariante

$$\begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix} = \Delta(123)$$

ove le $\eta_1, \zeta_1, \xi_1; \eta_2, \zeta_2, \xi_2; \eta_3, \zeta_3, \xi_3$ sono variabili cogredienti.

Quindi si vede che il rapporto $\frac{\Delta(1,2,3)}{\Delta(1,2,4)}$ è un invariante assoluto.

Ora si vede subito che

$$\Delta(123) = \frac{1}{\xi_1 \xi_2 \xi_3} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{D(123)}{\xi_1 \xi_2 \xi_3};$$

Quindi si trae subito che il prodotto dei due invarianti assoluti

$$\frac{\Delta(123)}{\Delta(124)} \cdot \frac{\Delta(456)}{\Delta(356)},$$

si riduce identicamente a

$$\frac{D(123) \cdot D(456)}{D(124) \cdot D(356)}$$

che sarà, a sua volta, un'invariante assoluto rispetto alle (3); in particolare potrà essere $y_1 = y_6, z_1 = z_6$.

Questa è un'estensione della proprietà dell'equazione di Riccati; ci dice che

L'espressione

$$\left| \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{ccc} y_4 & y_5 & y_6 \\ z_4 & z_5 & z_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{ccc} y_3 & y_5 & y_6 \\ z_3 & z_5 & z_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right|$$

ove le y, z sieno coppie e soluzioni delle (6), è costante; in particolare può essere $y_1 = y_6, z_1 = z_6$.

Conosciute quindi cinque coppie-soluzioni delle (6), è determinata, senza quadratura, ogni altra soluzione ⁽¹⁾.

Basta infatti risolvere il sistema

$$\frac{D(1\ 2\ 3) \cdot D(4\ 5\ 1)}{D(1\ 2\ 4) \cdot D(3\ 5\ 1)} = k_1 \quad ; \quad \frac{D(1\ 2\ 3) \cdot D(4\ 6\ 1)}{D(1\ 2\ 4) \cdot D(3\ 6\ 1)} = k_2$$

per ottenere la soluzione y_1, z_1 , se si conoscono le coppie (2), ... (6).

Per verificare direttamente tale proprietà, consideriamo le coppie (1), (2), (3). Sostituiamo nella (6), al posto di y, y_1, z_1 , e moltiplichiamo la prima per $(z_2 - z_3)$, la seconda per $(y_1 - y_3)$; permutiamo circolarmente gli indici, e consideriamo l'espressione

$$\begin{aligned} & \{y'_1(z_2 - z_3) - y'_2(z_1 - z_3) + y'_3(z_1 - z_2)\} - \\ & - \{z'_1(y_2 - y_3) - z'_2(y_1 - y_3) + z'_3(y_1 - z_2)\} = \frac{d}{dx} \cdot D(1\ 2\ 3). \end{aligned}$$

(1) Per $n - 1$ variabili, si hanno le equazioni

$$y'_\rho = k_\rho + \Sigma a_{\rho\sigma} \cdot y_\sigma - y_\rho (\Sigma b_\sigma y_\sigma), \quad (\rho = 1, \dots, n - 1)$$

con gli invarianti

$$\frac{D(1\ 2\ 3 \dots n) \cdot D(n+1 \dots 2n)}{D(1\ 2\ 3 \dots n+1) \cdot D(n \dots 2n)}.$$

ove, al più, $n - 2$ n -ple possono coincidere.

La soluzione generale è conosciuta allorchè si conoscono $2n + 1$ soluzioni: basta scrivere il sistema di $n - 1$ equazioni

$$\frac{C(1\ 2 \dots n-1, n) \cdot D(n+1, n+2, 3, \dots 1)}{D(1\ 2 \dots n-1, n+1) \cdot D(n, n+2, 3, \dots 1)} = k_1;$$

$$\frac{D(1, 2, n-1, n) \cdot D(n+1, n+3, 3, \dots 1)}{D(1, 2, n-1, n+1) \cdot D(n, n+3, 3, \dots 1)} = k_2, \dots$$

ove la (1) sia incognita, e le (2), ..., (n), (n+1), .. (2n) sono note.

È facile vedere che otterremo, per le (6),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} D(123) = & a \{ y_1(z_1 - z_3) - y_2(z_1 - z_3) + y_3(z_1 - z_2) \} + \\ & + b \{ -z_1(y_2 - y_3) + z_2(y_1 - y_3) - z_3(y_1 - y_2) \} + \\ & + y_1(my_1 + n_{-1})(z_2 - z_3) - y_2(my_2 + n_{-2})(z_1 - z_3) + \\ & + y_3(my_3 + n_{-3})(z_1 - z_2) + z_1(my_1 + n_{-1})(y_2 - y_3) + \dots \end{aligned}$$

Ora, è facile vedere che quest'ultima espressione può scriversi anche

$$\frac{d}{dx} D(123) = a \cdot D(123) + b D(123) + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \alpha_2 + \alpha_3 & \alpha_1 + \alpha_3 & \alpha_1 + \alpha_2 \end{vmatrix},$$

ove $\alpha = my + nz$; e se, in quest'ultimo determinante, all'ultima linea sommiamo la prima moltiplicata per m , la seconda moltiplicata per n , ottieniamo, all'ultima linea, il fattore $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$; e perciò

$$\frac{d}{dx} D(123) = a D(123) + b D(123) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \cdot D(123).$$

Quindi, si ha

$$\frac{d \log D(123)}{dx} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3;$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \{ \log D(123) + \log D(456) - \log D(124) - \log D(356) \} = \\ = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4) - (\alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_6) = 0. \end{aligned}$$

E questa, integrata, ci dà proprio il teorema che avevamo trovato così brevemente (1).

4. Risultati completamente analoghi si possono ottenere per equazioni di tipo più generale. Partendo da un qualunque gruppo di trasformazioni ad n variabili per ν parametri essenziali, e supponendo le variabili ed i parametri funzioni della x , l'integrazione delle trasformazioni del gruppo ci condurrà alla soluzione di equazioni differenziali, facilmente ricavabili dal gruppo stesso.

Se inoltre con ϱ serie di n variabili cogredienti si può formare un invariante assoluto H rispetto alle trasformazioni del gruppo, tale invariante

(1) Se invece di considerare il gruppo lineare fratto, si considera un suo sottogruppo, avente altri invarianti, si hanno equazioni differenziali del tipo scritto, fra i cui coefficienti intercedono relazioni, e fra le cui soluzioni esistono altre relazioni ancora.

ci darà una relazione fra ϱ soluzioni di quelle equazioni, se lo si egualga ad una costante.

E perciò, conoscute $\varrho + n - 2$ soluzioni, (1) (2) ($\varrho + n - 2$), di quelle equazioni, sarà conosciuta, senza quadratura qualsiasi altra, ricavandosi essa dalle relazioni

$$H((1), (2), \dots, (\varrho - 1), (\varrho')) = k_1, \quad H((1), \dots, (\varrho - 2), (\varrho), (\varrho' + n)) = \\ = k_2, \dots, H((1), \dots, (\varrho - 2), (\varrho + n - 2), (\varrho')) = k_n,$$

con k_1, k_2, \dots, k_n costanti arbitrarie.

Potrebbe naturalmente essere $n = \infty$, il quale caso comprende l'integrazione di due gruppi funzionali, e la soluzione di integro-differenziali; o $\nu = \infty$, che è il caso della più generale equazione differenziale; o infine $\nu = n = \infty$ che dà luogo alle più generali integro differenziali.

Matematica. — Su una classe di congruenze W di carattere proiettivo. Nota di GUIDO FUBINI, presentata dal Socio LUIGI BIANCHI.

1. In una mia Memoria ⁽¹⁾ io ho dimostrato che, come le forme differenziali di Gauss definiscono, in geometria differenziale, una superficie a meno di movimenti, così in modo analogo si può definire una superficie a meno di collineazioni per mezzo di forme differenziali del primo ordine; le quali anzi si possono scegliere in modi molteplici. Uno dei modi più interessanti è di definire la superficie mediante due forme del *primo* ordine: una di terzo grado (che, uguagliata a zero, dà l'equazione differenziale delle linee, che io chiamo di Darboux-Segre); e l'altra di secondo grado (che, uguagliata a zero, dà l'equazione delle linee di Wilczynski). L'equazione ottenuta, annullando lo hessiano della prima, dà l'equazione delle asintotiche; e, assunte queste come linee coordinate u, v , le due forme si possono ⁽²⁾ scrivere

$$\Sigma_1 = 2 \left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} \left[\left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} du^3 + \left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} dv^3 \right]$$

$$W_1 = -P du^2 + R du dv + Q dv^2,$$

⁽¹⁾ *Invariante proiettivo-differenziali* ecc. Questa Mem. è in corso di stampa negli *«Annali di Matematica»*.

⁽²⁾ Seguo le notazioni delle classiche *Lezioni* di geometria differenziale del prof. L. Bianchi. Con $\left\{ \begin{smallmatrix} i \\ l \end{smallmatrix} \right\}$ ($i, k, l = 1, 2$) indico pertanto i simboli di Christoffel di seconda specie per l'elemento lineare.

ove

$$\begin{aligned}
 P = & \frac{1}{2} \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}' - \frac{1}{4} \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}^2 - \frac{1}{2} \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}' + \\
 & + \frac{1}{2} \left(\log \left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} \right)''_{uu} + \frac{1}{4} \left[\left(\log \left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} \right)'_u \right]^2 \\
 R = & \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \frac{\left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}}{\left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}}.
 \end{aligned}$$

Q si deduce da P, permutando u con v , l'indice 1 con l'indice 2 ⁽¹⁾.

2. Le superficie, per cui è eccezionale il seguente problema: *Determinare* (a meno di una collineazione) una superficie di cui sono date le linee di Darboux-Segre e le linee di Wilczynski, formano una classe notevole di superficie. Si tratta delle superficie per cui $R = 0$; cioè delle *superficie, per cui le linee di Wilczynski costituiscono un sistema coniugato*. Lo studio anzi del problema citato per tali classi di superficie, di cui si sta ora occupando uno studente della Università di Torino, offre molte notevoli particolarità.

3. Queste superficie godono analiticamente della seguente proprietà: se non è $\left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = 0$, oppure $\left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = 0$, nel qual caso si tratta di superficie *rigate*, si può, con un cambiamento dei parametri u, v delle assintotiche, supporre che per esse sia $\left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}$. Queste superficie, che costituiscono la più semplice generalizzazione delle superficie rigate, dipendono dunque da una funzione $\left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}$ arbitraria delle u, v e inoltre dai valori, che ancora si possono scegliere ad arbitrio, di P su una assintotica $v = \text{cost}$, e di Q su una assintotica $u = \text{cost}$.

4. Tali superficie si presentano nel modo più spontaneo nel problema seguente; il quale, oltre al problema citato al n. 2, promette di dare una teoria della trasformazione di tali superficie con congruenze W.

Come sorge spontaneo dalla mia Memoria citata, le linee $\Sigma = 0$ di Darboux-Segre sono, dopo le assintotiche, il più semplice sistema di linee, tracciato su una superficie, che si possa definire in modo puramente proiettivo. Anzi la conoscenza di tali linee determina le assintotiche, la cui equazione è precisamente lo hessiano di Σ_1 .

(1) Come sarà dimostrato altrove, la prima di queste forme ha grande importanza per lo studio di un problema, che è, per il gruppo proiettivo, l'analogo del problema della deformazione di una superficie in una superficie applicabile.

Noi ci chiediamo dunque:

Quando mai la corrispondenza stabilita tra le due falde focali da una congruenza di rette è tale che sulle due falde focali si corrispondano le linee $\Sigma_1 = 0$ di Darboux-Segre?

Una tale congruenza è necessariamente W. Come si vedrà, le congruenze, di cui qui ci occupiamo, si possono considerare come una semplice generalizzazione delle congruenze a falde focali rigate, già studiate dai professori Bianchi e Segre. I teoremi che qui dimostreremo sono i seguenti:

1°) Le falde focali di una di tali congruenze sono superficie su cui le linee di Wilczynski formano un sistema coniugato.

2°) Viceversa ogni tale superficie è falda focale di ∞^3 congruenze, sulle cui falde si corrispondono le linee di Darboux-Segre.

Pare dunque non privo di ogni interesse lo studio più profondo del problema, a cui è dedicata la presente Nota.

5. Per dimostrare i teoremi citati, mi varrò dei risultati di una Memoria del prof. Picone (1). Con $e du^2 + 2f du dv + g dv^2$ indicherò l'elemento lineare dell'immagine sferica della prima falda focale della congruenza; con ψ la funzione caratteristica della deformazione infinitesima individuata dalla congruenza; con $\psi_i, \psi_{ik}, \psi_{ikl}$ indicherò per $i, k, l = 1, 2$ le derivate covarianti di ψ rispetto a tale forma quadratica; con $\left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}, \left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}$ i simboli di Christoffel di tale elemento sferico, che differiscono solo per il segno dai simboli analoghi costruiti per l'elemento lineare della prima falda focale. È ben noto che

$$(1) \quad \psi_{12} + f\psi = 0.$$

D'altra parte [cfr. le (10), (11) del § 3 di (P)] affinchè tali simboli relativi ad una falda siano proporzionali ai simboli omologhi costruiti per l'altra falda; cioè, affinchè sulle due falde si corrispondano le linee di Darboux-Segre, deve essere, indicando con λ un fattore di proporzionalità,

$$(2) \quad \psi_{11} + e\psi = \frac{\lambda}{H} \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}$$

$$(3) \quad \psi_{22} + g\psi = -\frac{\lambda}{M} \left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}$$

(1) *Sulle congruenze rettilinee W* (Rendiconti del Circ. matem. di Palermo, 1913, tomo XXXVII). In questa Memoria, fondamentale per la teoria di tali congruenze, l'A., superando gravi difficoltà analitiche, calcola tutti gli elementi di una congruenza W. Indicherò questa Memoria con (P).

dove $H = \sqrt{e} \sin(\theta + \omega)$ ed $M = \sqrt{g} \sin(\theta - \omega)$; con ω è indicato l'angolo definito dalla $\cos 2\omega = \frac{f}{\sqrt{e}g}$; con θ l'angolo fra 0 e π che un raggio della congruenza fa con una linea di curvatura.

Ora essendo $+1$ la curvatura dell'elemento lineare $edu^2 + 2fdu\,dv + gdv^2$, si ha identicamente ⁽¹⁾

$$(4) \quad \psi_{121} - \psi_{112} = -f\psi_1 + e\psi_2 \quad ; \quad \psi_{221} - \psi_{212} = f\psi_2 - g\psi_1.$$

Sostituendo in (4), al posto della ψ_{pqt} , i loro valori

$$\psi_{pqt} = \frac{\partial \psi_{pq}}{\partial x_t} - \sum_s \left\{ \begin{matrix} p & t \\ s & \end{matrix} \right\} \psi_{sq} - \sum_s \left\{ \begin{matrix} q & t \\ s & \end{matrix} \right\} \psi_{ps} \quad (p, s, q, t = 1, 2),$$

dove al posto di ψ_{pq} si scrive il valore che se ne deduce dalle (1), (2), (3), le (4) diventano le condizioni di integrabilità di (1), (2), (3) considerate come equazioni nella ψ . Ricordando che, per $\lambda = 0$, queste condizioni sono soddisfatte, esse assumono la forma semplice (indicando con $-\frac{1}{\varrho^2}$ la curvatura della prima falda focale)

$$(5) \quad \frac{\partial \log \lambda}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial v} \log \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \\ \hline 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \frac{\partial \log \sqrt{\varrho}}{\partial v} - \frac{H}{M} \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \\ \hline 1 \end{matrix} \right\} = 0$$

$$(6) \quad \frac{\partial \log \lambda}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u} \log \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \\ \hline M \\ 1 \end{matrix} \right\} + \frac{\partial \log \sqrt{\varrho}}{\partial u} - \frac{M}{H} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \\ \hline 1 \end{matrix} \right\} = 0.$$

Bisogna calcolare la condizione di integrabilità delle (5) e (6) e considerate come equazioni in λ . Si trova

$$(7) \quad \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \\ \hline 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \Omega = 0,$$

dove

$$(8) \quad \Omega = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \frac{M}{H} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{M}{H} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \\ \hline 1 \end{matrix} \right\} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{H}{M} \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \\ \hline 1 \end{matrix} \right\} \right).$$

Proveremo tosto che $\Omega = 0$; allora la (7) coincide con l'equazione con cui al n. 2 abbiamo definito le nostre superficie.

(1) Ricci, *Teoria delle superficie*. Padova, ed. Drucker, 1898, pag. 109.

Viceversa, se questa equazione è soddisfatta, le (5) e (6) permettono di determinare λ con una sola quadratura. E le (1), (2), (3) diventano un sistema illimitatamente integrabile.

6. Dimostriamo dunque che $-\Omega = 0$. Adotteremo senz'altro le notazioni di (P), indicando con σ l'angolo dei piani focali, con t la distanza dei fochi, e ponendo

$$\delta = eg - f^2 \quad ; \quad K = \sqrt{e} \cos(\theta + \omega) \quad ; \quad N = \sqrt{g} \cos(\theta - \omega).$$

Per il calcolo di $-\Omega$ è importante ricordare le (II*) e le (9) del § 1 di (P); le quali permettono di calcolare le derivate di $\cot \sigma$, di H, K, M, N . Sarà bene ricordare anche l'identità $\delta \bar{\delta} = HN - MK$. Scrivendo $-\Omega$ nella forma

$$\frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{\partial}{\partial u} \log \frac{H}{M} - \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} \frac{M}{H} \right] - \frac{\partial}{\partial u} \left(\left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} \frac{H}{M} \right)$$

si trova facilmente, calcolando l'espressione tra [...], che

$$\begin{aligned} -\Omega = & \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log(\varrho \sqrt{\delta}) + \\ & + \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{H}{M} \frac{\partial \log \sqrt{\varrho}}{\partial v} - \frac{1}{M} \left(\cot \sigma + \frac{\varrho}{t} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial u} \left(\left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} \frac{H}{M} \right). \end{aligned}$$

Applicando di nuovo le citate equazioni di (P), si trova infine che $-\Omega$ è uguale a

$$\begin{aligned} \frac{H}{M} \left[& \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} \frac{\partial \log(\varrho \sqrt{\delta})}{\partial u} + \frac{\partial^2 \log \sqrt{\varrho}}{\partial v^2} - \frac{\partial \log \sqrt{\varrho}}{\partial v} \frac{\partial \log(\varrho \sqrt{\delta})}{\partial v} \right] \\ & - \frac{N}{M} \frac{1}{\delta} + \left[\left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} + \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log(\varrho \sqrt{\delta}) - \frac{\partial \log \sqrt{\varrho}}{\partial u} \frac{\partial \log \sqrt{\varrho}}{\partial v} \right]. \end{aligned}$$

Scrivendo le (4) del § 3 di (P), scrivendo cioè le equazioni che dicono essere uguale a $+1$ la curvatura di $edu^2 + 2fdu dv + g dv^2$, si trova che $-\Omega$ (moltiplicato per il fattore $M \neq 0$) si riduce a

$$\begin{aligned} gH - N\sqrt{\delta} - Mf = \\ = g\sqrt{e} [\sin(\theta + \omega) - \cos(\theta - \omega) \sin 2\omega - \sin(\theta - \omega) \cos 2\omega] \end{aligned}$$

che è identicamente nulla [perchè $\theta + \omega = (\theta - \omega) + 2\omega$], come volevasi dimostrare.

Matematica. — *Sopra un'applicazione della convergenza in media.* Nota I di PIA NALLI, presentata dal Corrisp. G. BAGNERA.

Il prof. Pincherle ha fatto un'applicazione del concetto di convergenza in media ⁽¹⁾ alla rappresentazione di una funzione analitica ⁽²⁾. Richiamo brevemente il risultato al quale egli è arrivato.

Premetto la seguente definizione: un sistema di funzioni di una variabile reale t , sommabili insieme coi loro quadrati in un intervallo (a, b) e dipendenti da un parametro reale r , $f(t, r)$, si dice convergente in media ad una funzione $f(t)$, sommabile, insieme col suo quadrato, in (a, b) , quando r tende ad r_0 , se, fissato comunque un numero positivo ε , si può determinare un altro numero positivo δ , tale che, per $|r - r_0| < \delta$, risulti

$$\int_a^b [f(t) - f(t, r)]^2 dt < \varepsilon.$$

Si ha il seguente teorema:

Sia $\varphi(x)$ una funzione della variabile complessa x , analitica, regolare entro il cerchio di centro $x = 0$ e raggio 1, e, posto

$$\begin{aligned} x &= r e^{it} & (0 \leq r < 1) \\ \varphi(x) &= \alpha(r, t) + i\beta(r, t) & (0 \leq t < 2\pi), \end{aligned}$$

esistano due funzioni di t , $p(t)$ e $q(t)$, sommabili insieme coi loro quadrati nell'intervallo $(0, 2\pi)$, alle quali, al tendere di r a 1, convergano in media rispettivamente $\alpha(r, t)$ e $\beta(r, t)$. Sotto queste ipotesi la $p(t) + i q(t)$, che è funzione $u(z)$ dei punti z del piano x posti sulla circonferenza (γ) di centro $x = 0$ e raggio 1, è tale che l'espressione

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(\gamma)} \frac{u(z)}{z - x} dz$$

rappresenta la funzione $\varphi(x)$.

(1) E. Fischer, *Sur la convergence en moyenne*. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. Paris, tom. CXLIV, 1^{er} semestre 1907, pp. 1022-1024.

(2) S. Pincherle, *Un'applicazione della convergenza in media*. Rend. della R. Acc. dei Lincei, Roma, vol. XXII, serie 5^a, 2^o semestre 1913, pp. 397-402.

Si vengono così ad assegnare condizioni più generali di quelle che comunemente si pongono per la validità della formula di Cauchy

$$(1) \quad \varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\gamma)} \frac{\varphi(z)}{z-x} dz.$$

Mi propongo di far vedere che alla proposizione del prof. Pincherle se ne può fare corrispondere un'altra, relativa alla rappresentazione delle serie di Dirichlet di una particolare classe, quando si faccia uso di una definizione di convergenza in media da me introdotta ⁽¹⁾.

Inoltre, si può facilmente dimostrare che, se la funzione $\varphi(x)$ è rappresentata, all'interno del cerchio di centro $x=0$ e raggio 1, dalla serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza delle funzioni $p(t)$ e $q(t)$ del teorema del prof. Pincherle è che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ risulti convergente.

In una prossima Nota dimostrerò che anche a quest'ultima proposizione, relativa alle funzioni analitiche, se ne può fare corrispondere una analoga relativa alle serie di Dirichlet.

1. Sia la serie di Dirichlet

$$(2) \quad f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s},$$

dove le a_n sono costanti, $s = \sigma + it$ è una variabile complessa e le λ_n sono costanti reali che costituiscono una successione crescente ed illimitata. Sulle λ_n faremo l'ipotesi che la serie

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n s}$$

converga nel semipiano $\sigma > 0$. Ciò avviene in particolare se è $\lambda_n = n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), nel quale caso la serie di Dirichlet si può trasformare in una serie di potenze.

Per una serie di Dirichlet della classe considerata, vale il seguente teorema:

Se la serie (2) converge in un punto $s_0 = \sigma_0 + it_0$, essa converge assolutamente nel semipiano $\sigma > \sigma_0$.

⁽¹⁾ P. Nalli, *Sopra una nuova specie di convergenza in media*. Rend. del Circolo matematico di Palermo, tomo XXXVIII, 2^o semestre 1914, pp. 305-319; *Aggiunta alla Memoria: «Sopra una nuova specie di convergenza in media»*. Rend. del Circ. matematico di Palermo, tomo XXXVIII, 2^o semestre 1914, pp. 320-323.

Infatti, se s è un punto di tale semipiano, essendo

$$a_n e^{-\lambda_n s} = a_n e^{-\lambda_n s_0} e^{-\lambda_n(s-s_0)},$$

si avrà

$$|a_n e^{-\lambda_n s}| < c e^{-\lambda_n(\sigma-\sigma_0)},$$

dove c è una costante che non dipende da n ; e siccome la serie che ha per termine generale $e^{-\lambda_n(\sigma-\sigma_0)}$ è convergente, la (2) converge assolutamente nel punto s .

Per una serie della classe considerata, la *ascissa di convergenza* coincide con la *ascissa di convergenza assoluta*, come nelle serie di potenze il raggio di convergenza è anche raggio di convergenza assoluta.

Per una serie di Dirichlet della classe considerata si può facilmente stabilire una formula analoga alla formula (1) di Cauchy. Essa può dedursi dal seguente teorema, valido indipendentemente dalla convergenza della (3):

Siano

$$h(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n s}$$

e

$$k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n s}$$

due serie di Dirichlet; la prima sia assolutamente convergente per $\sigma = \beta$, e la seconda lo sia per $\sigma = \gamma$. Si ha allora

$$(4) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} h(\beta + it) k(\gamma - it) dt = \sum_{n=1}^{\infty} b_n c_n e^{-\lambda_n(\beta+\gamma)} \quad (1).$$

Per la serie (2) avremo, posto nel semipiano $\sigma < 0$

$$G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n s},$$

$$\frac{1}{2\omega i} \int_{\beta-\omega i}^{\beta+\omega i} f(s) G(s-s_0) ds = \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} f(\beta+it) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n(s_0-\beta)} e^{\lambda_n it} dt,$$

dove l'integrazione del primo membro è estesa al segmento che va dal punto $\beta - \omega i$ al punto $\beta + \omega i$. Nell'ipotesi che la (2) converga assolutamente per $\sigma = \beta$ e che sia $\sigma_0 > \beta$, si avrà, per la (4),

$$(5) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega i} \int_{\beta-\omega i}^{\beta+\omega i} f(s) G(s-s_0) ds = f(s_0).$$

(1) E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*. Leipzig, Teubner, 1909, Bd. II, pp. 776-778.

È questa la formula analoga alla formula (1) di Cauchy che volevo stabilire: da essa, per $\lambda_n = n$, si può dedurre la (1); o, viceversa, dalla (1) può dedursi la (5).

3. Ciò posto, sia $f(t, r)$ un sistema di funzioni, reali o complesse, della variabile reale t e dipendenti da un parametro reale r . $f(t, r)$, quando si fissa r , sia sommabile, insieme col quadrato del suo modulo, in ogni intervallo finito, e sia inoltre

$$\limsup_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |f(t, r)|^2 dt = L_r,$$

essendo L_r una quantità finita. Diremo che l'insieme delle funzioni $f(t, r)$, quando r tende ad r_0 , converge in media, nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$, ad una funzione $f(t)$, sommabile, insieme col quadrato del suo modulo, in ogni intervallo finito, quando, comunque si fissi il numero positivo ε , si può determinare un numero positivo δ , tale che, per $|r - r_0| < \delta$, risulti

$$\limsup_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |f(t) - f(t, r)|^2 dt < \varepsilon \quad (1).$$

È chiaro che, essendo

$$|f(t)|^2 \leq 2|f(t, r)|^2 + 2|f(t) - f(t, r)|^2,$$

sarà, per $|r - r_0| < \delta$,

$$\limsup_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |f(t)|^2 dt \leq 2L_r + 2\varepsilon;$$

e cioè

$$\limsup_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |f(t)|^2 dt = L,$$

essendo L una quantità finita.

Dimostreremo il seguente teorema:

Sia la serie (2) convergente nel semipiano $\sigma > \beta$, e, posto

$$s = \sigma + it$$

ed

$$f(s) = \alpha(\sigma, t),$$

esista una funzione $p(t)$ alla quale $\alpha(\sigma, t)$ converga in media, secondo

(1) Cfr. la nota a pag. 150.

la nuova definizione, quando σ tende a β per valori maggiori di β . Se $s_0 = \sigma_0 + it_0$ è un punto qualunque del semipiano $\sigma > \beta$, si avrà

$$(6) \quad f(s_0) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{\beta - \omega i}^{\beta + \omega i} u(s) G(s - s_0) ds,$$

dove con $u(s)$ si denota la funzione $p(t)$ considerata come funzione dei punti s della retta $\beta + it$.

Si ha infatti, per qualunque σ soddisfacente alla condizione

$$\beta < \sigma < \sigma_0.$$

$$f(s_0) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} \alpha(\sigma, t) G(\sigma + it - s_0) dt.$$

Si ha poi, identicamente,

$$(7) \quad \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} p(t) G(\beta + it - s_0) dt = \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} \alpha(\sigma, t) G(\sigma + it - s_0) dt + \\ + \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} [p(t) - \alpha(\sigma, t)] G(\sigma + it - s_0) dt + \\ + \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} p(t) [G(\beta + it - s_0) - G(\sigma + it - s_0)] dt.$$

Applicando l'ineguaglianza di Schwarz, si ottiene

$$\left| \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} [p(t) - \alpha(\sigma, t)] G(\sigma + it - s_0) dt \right| \leq \\ \leq \left\{ \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |p(t) - \alpha(\sigma, t)|^2 dt \cdot \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |G(\sigma + it - s_0)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Si ha poi

$$|G(\sigma + it - s_0)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n(\sigma - \sigma_0)},$$

e perciò, fissata una costante positiva $k < \sigma_0 - \beta$, si potrà determinare una costante c in modo che sia

$$|G(\sigma + it - s_0)| < c^2$$

per tutti i valori di σ che non superano $\beta + k$.

Fissato $\varepsilon > 0$, determiniamo δ positivo e minore di k in modo che, per i valori di σ soddisfacenti alla condizione

$$\beta < \sigma < \beta + \delta,$$

risulti

$$\limsup_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |p(t) - \alpha(\sigma, t)|^2 dt < \varepsilon^2.$$

Avremo allora

$$\limsup_{\omega \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} [p(t) - \alpha(\sigma, t)] G(\sigma + it - s_0) dt \right| \leq c\varepsilon.$$

Inoltre, essendo

$$G(\beta + it - s_0) - G(\sigma + it - s_0) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n(it-s_0)} (e^{\lambda_n \beta} - e^{\lambda_n \sigma})$$

ed

$$e^{\lambda_n \sigma} - e^{\lambda_n \beta} = \lambda_n \int_{\beta}^{\sigma} e^{\lambda_n u} du,$$

sarà, se, per qualunque n , è $\lambda_n > 0$,

$$|G(\beta + it - s_0) - G(\sigma + it - s_0)| \leq (\sigma - \beta) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e^{\lambda_n(\sigma - \sigma_0)};$$

si potrà dunque determinare una costante c' in modo che, per tutti i valori di σ che non superano $\beta + k$ e qualunque sia t , si abbia

$$|G(\beta + it - s_0) - G(\sigma + it - s_0)| \leq c'(\sigma - \beta).$$

Lo stesso si potrà dire se le λ_n non sono tutte positive.

Dall'ineguaglianza di Schwarz si ottiene quindi

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} p(t) [G(\beta + it - s_0) - G(\sigma + it - s_0)] dt \right| &\leq \\ &\leq c'(\sigma - \beta) \left\{ \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} |p(t)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

e perciò

$$\limsup_{\omega \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} p(t) [G(\beta + it - s_0) - G(\sigma + it - s_0)] dt \right| \leq L^{\frac{1}{2}} c'(\sigma - \beta).$$

Dalla (7) si conclude dunque

$$\limsup_{\omega \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} p(t) G(\beta + it - s_0) dt - f(s_0) \right| \leq c\varepsilon + L^{\frac{1}{2}} c'(\sigma - \beta);$$

ed essendo $\sigma = \beta$ ed ε arbitrari, avremo

$$\limsup_{\omega \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} p(t) G(\beta + it - s_0) dt - f(s_0) \right| = 0,$$

cioè

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} p(t) G(\beta + it - s_0) dt = f(s_0),$$

restando così dimostrata la (6).

Dal teorema dimostrato, supponendo $\lambda_n = n$, può dedursi il teorema del prof. Pincherle.

Meccanica. — *Sulla deformazione di un suolo elastico nel caso dell'eredità lineare, per date tensioni superficiali.* Nota di R. SERINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In una Nota recente ⁽¹⁾ ho determinato la deformazione del suolo elastico, quando in superficie sieno dati gli spostamenti. Risolverò ora il problema nel caso che in superficie sieno date le pressioni.

La relativa risoluzione è da me accennata in questa breve Nota, limitandomi a trovare la dilatazione cubica, e mostrando in seguito il metodo per ottenere gli spostamenti, senza arrivare alle formole finali.

In sostanza farò vedere come il metodo si riduca all'ordinario quando vengano sostituite alle due costanti d'isotropia del mezzo, le due operazioni funzionali che entrano nella teoria elastica ereditaria.

1. Nella teoria ereditaria del Volterra entrano le due operazioni funzionali

$$(1) \quad \begin{cases} A_1 f(t) = K f(t) + \int_0^t \psi(t, \tau) f(\tau) d\tau, \\ A_2 f(t) = (L + 2K) f(t) + \int_0^t [\varphi(t, \tau) + 2\psi(t, \tau)] f(\tau) d\tau. \end{cases}$$

Indicherò con $A_1^{-1}f$ l'operazione inversa della $A_1 f$: si ottiene risolvendo una equazione di Volterra di seconda specie. Parimenti, essendo $A_1 f$, $B f$ due operazioni del tipo anzidetto, sasà $AB f$ l'operazione ottenuta eseguendo, sulla $f(t)$, prima l'equazione B , e, sul risultato ottenuto, l'operazione A .

Ciò posto siano u, v, w le componenti dello spostamento di un punto d'un corpo elastico, θ la dilatazione cubica in quel punto.

⁽¹⁾ *Sulla deformazione di un suolo elastico ecc.* Rendiconti Lincei, 6 giugno 1915.

Le equazioni dell'equilibrio elastico con eredità sono (1) (nell'assenza di forze di massa)

$$(2) \quad \mathcal{A}^2 u = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}, \quad \mathcal{A}^2 v = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}, \quad \mathcal{A}^2 w = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2},$$

essendosi posto

$$(3) \quad \vartheta = (1 - A_1^{-1} A_2) \theta.$$

Si deduce facilmente da queste,

$$(4) \quad \mathcal{A}^2 \vartheta = \mathcal{A}^2 \theta = 0.$$

Siano inoltre t_{rs} le componenti principali di pressione, in ogni punto del corpo: valgono allora le formole

$$(5) \quad \mathcal{A}^2 t_{11} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}, \dots \quad \mathcal{A}^2 t_{12} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y},$$

dove

$$(6) \quad \Theta = 2(A_1 - A_2) \theta;$$

e sarà, per la seconda delle (4),

$$(7) \quad \mathcal{A}^2 \Theta = 0.$$

2. Sia ora un solido elastico indefinito limitato da un piano che prenderemo come piano xy : l'asse delle z (normale al piano limite) sia interno al corpo. Sono date per ipotesi le componenti $X_\sigma, Y_\sigma, Z_\sigma$ della pressione che si esercita in superficie: si vuole determinare la deformazione del corpo, le forze di massa essendo nulle.

Consideriamo le tre componenti principali di pressione t_{13}, t_{23}, t_{33} : esse prendono valori noti in superficie riducendovisi alle $X_\sigma, Y_\sigma, Z_\sigma$; di più, soddisfano alle equazioni [vedi (5)]

$$(5') \quad \mathcal{A}^2 t_{13} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial z}, \quad \mathcal{A}^2 t_{23} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z}, \quad \mathcal{A}^2 t_{33} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2}.$$

Se consideriamo le tre funzioni

$$X_1 = -\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{X_\sigma}{r} d\sigma, \quad Y_1 = -\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{Y_\sigma}{r} d\sigma, \quad Z_1 = -\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{Z_\sigma}{r} d\sigma,$$

dove le integrazioni sono estese al piano xy ed r rappresenta la distanza del generico punto x, y, z dal punto d'integrazione del piano xy , esse, come è noto, sono armoniche e soddisfano alle condizioni

$$\left(\frac{\partial X_1}{\partial z} \right)_{z=0} = X_\sigma \dots$$

(1) Vedi Volterra, *Fonctions des lignes*, cap. VIII e IX; oppure *Acta mathematica*, vol. 35°, cap. II.

È facile allora verificare [servendoci d'un noto teorema di univocità dell'Almansi ⁽¹⁾] che

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} t_{13} = \frac{1}{2} z \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial z} , \quad t_{23} = \frac{1}{2} z \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \frac{\partial Y_1}{\partial z} , \\ t_{33} = \frac{1}{2} z \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{\partial Z_1}{\partial z} . \end{array} \right.$$

Abbiamo così le t_{13}, t_{23}, t_{33} espresse mediante Θ : ne ricaveremo la Θ . Una delle condizioni di equilibrio (essendo nulle le facce di massa) è

$$\frac{\partial t_{12}}{\partial x} + \frac{\partial t_{23}}{\partial y} + \frac{\partial t_{31}}{\partial z} = 0.$$

Servendoci delle (8) e ricordando la (7), deduciamo

$$\frac{\partial \Theta}{\partial z} = -2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_1}{\partial y} + \frac{\partial Z_1}{\partial z} \right).$$

Le due funzioni Θ ed $F = -2 \left(\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_1}{\partial y} + \frac{\partial Z_1}{\partial z} \right)$ entrambe armniche, e con derivate rispetto a z , eguali, non possono differire che per una funzione $\varphi(x, y)$ armonica in tutto il piano xy (z qualunque) e, perciò, costante. Ma F si annulla all'infinito; lo stesso può evidentemente ⁽²⁾ dirsi della θ e, quindi, di Θ : dovrà la costante, in conseguenza, essere eguale a zero, e si avrà

$$\Theta = -2 \left(\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_1}{\partial y} + \frac{\partial Z_1}{\partial z} \right);$$

e dalla (6), che definisce Θ mediante la dilatazione cubica θ , si ottiene

$$(9) \quad \theta = (A_2 - A_1)^{-1} \left(\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_1}{\partial y} + \frac{\partial Z_1}{\partial z} \right).$$

Nota la dilatazione cubica θ dico essere nota la $\frac{dc}{dn}$, essendo n la normale al contorno: infatti, dette ω_1, ω_2 le doppie componenti della rotazione di ogni particella, sappiamo che, in generale ⁽³⁾,

$$\frac{dc}{dn} = \frac{1}{2} \left[A_1^{-1} Z_\sigma + \omega_1 \cos \widehat{ny} - \omega_2 \cos \widehat{nz} + (2 - A_1^{-1} A_2) \cdot \theta \cdot \cos \widehat{nz} \right];$$

(1) Vedi Almansi, *Sull'integrazione dell'equazione $A^{2n} = 0$* . Annali di matematica, ser. 3^a, tomo II.

(2) L'annullarsi della θ all'infinito è evidente per le condizioni sottintese all'infinito per le funzioni $X_\sigma Y_\sigma Z_\sigma$, date nel piano xy .

(3) Vedi Volterra, *Acta mathematica*, cap. II, art. 9^o.

e questa relazione, essendo nel nostro caso $\cos \widehat{nx} = \cos \widehat{ny} = 0$, $\cos \widehat{ns} = 1$, diventa

$$(10) \quad \frac{dw}{dn} = \frac{1}{2} [A_1^{-1} Z_\sigma + (2 - A_1^{-1} A_2) \theta].$$

Ora, essendo note $A^2 w$ per le (2), e $\frac{dw}{dn}$ per la (10), la w è determinata, e si sa costruire.

Ricordo inoltre che ⁽¹⁾

$$t_{13} = K \gamma_{13} + \int_0^t \psi(t, \tau) \gamma_{13} d\tau = A_1 \gamma_{13},$$

$$t_{23} = K \gamma_{23} + \int_0^t \psi(t, \tau) \gamma_{23} d\tau = A_1 \gamma_{23}.$$

Ma, da quanto precede, t_{13}, t_{23} , sono note; e otterremo, invertendo,

$$\gamma_{13} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = A_1^{-1} t_{13},$$

$$\gamma_{23} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = A_1^{-1} t_{23}.$$

Saranno perciò note $\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}$, che per $z = 0$ si riducono alle derivate normali. Ora, per le (2), conosciamo $A^2 u, A^2 v$, essendo θ nota; e inoltre, per le precedenti considerazioni, le derivate normali di u e v . Quindi queste sono determinate e si sanno costruire, e il problema è risolto.

Matematica. — Sulle varietà trasversali delle rigate algebriche di uno spazio pari. Nota di ALESSANDRO TERRACINI, presentata dal Socio C. SEGRE.

1. Quando si abbia una rigata immersa in uno spazio di dimensione pari $S_{r,r}$, tale che r sue generatrici consecutive siano in generale linearmente indipendenti, presenta un certo interesse la considerazione della ⁽¹⁾ degli S_{r-1} appoggiati a $r+1$ generatrici consecutive (*varietà trasversale*), e della *curva trasversale*, luogo dei punti di contatto ($r+1$ — punto) di quegli S_{r-1} colla rigata ⁽²⁾. Vogliamo anzitutto determinare l'ordine di questa curva e

⁽¹⁾ Vedi Volterra, Acta mathematica, art. 6^o (9^a).

⁽²⁾ Cfr. M. Morale, *La rigata razionale d'ordine n dello spazio a quattro dimensioni e sua rigata trasversale, con particolare considerazione al caso di $n=5$* (Palermo, Tipografia matematica, 1899); H. Mohrmann, *Ueber die windschiefen Linienflächen im Raume von vier Dimensionen und ihre Haupttangentialflächen als reziproke*

di quella varietà, per una rigata Φ generica tra quelle di ordine n e di genere p (1).

Sia C^n la sezione della Φ con uno S_{2r-1} generico: e consideriamo la corrispondenza (α, β) che nasce sulla C^n , chiamando omologhi due suoi punti A e B tali che lo S_{2r-1} , determinato dalla generatrice b della Φ passante per B e da altre $r-1$ ad essa consecutive [S_{2r-1} ($r-1$)-tangente lungo la b], contenga ulteriormente A . La corrispondenza è a valenza r , ed è $\alpha = n - r$. Per quello che riguarda β , osserviamo che, proiettando la Φ da A sopra uno S_{2r-1} , si ottiene una Φ' d'ordine $n-1$ (e genere p) che sarà dotata precisamente di β sistemi di r generatrici consecutive situate in un iperpiano, o, come possiamo dire più brevemente, di $\beta = \beta$ ($n-1$, p , $2r-1$) generatrici singolari. Sarà, chiamando $\gamma = \gamma(n, p, 2r)$ l'ordine della curva trasversale.

$$(1) \quad \gamma(n, p, 2r) = n - r + \beta(n-1, p, 2r-1) + 2rp.$$

Ora, per determinare il numero β delle generatrici singolari di una rigata generica F^n di S_{2r-1} , di genere p , ricordiamo anzitutto che gli S_{2r-2} ($r-1$)-tangenti nei punti di una generatrice generica formano generalmente un fascio, intorno allo S_{2r-3} , determinato da quella generatrice e da $r-2$ ad essa infinitamente vicine, fascio che risulta riferito proiettivamente alla piumeggiata dei punti di contatto (estensione immediata del classico teorema di Chasles); a questo si ha eccezione (cioè la detta proiettività degenera) quando quella generatrice è singolare (nel senso sopra detto). Ora, poichè gli S_{2r-2} ($r-1$)-tangenti alla F^n costituiscono un sistema ∞^2 , formato dagli ∞^1 fasci di S_{2r-2} aventi per base gli $\infty^1 S_{2r-3}$ ($r-2$)-tangenti alla F lungo le sue generatrici, se consideriamo i due sistemi ∞^1 di S_{2r-2} ($r-1$)-tangenti alla F nei punti di due sue sezioni iperpiane, a^n e b^n , possiamo trovare il numero ϱ degli S_{2r-2} che sono ($r-1$)-tangenti in punti delle due curve, mediante la formula duale di quella ben nota che assegna il numero dei punti di intersezione di due curve tracciate su una rigata algebrica: precisamente se a una retta generica dello S_{2r-1} si appoggiano ϱ S_{2r-2} ($r-2$)-tangenti alla F lungo altrettante generatrici, e se il sistema costituito dagli S_{2r-2} ($r-1$)-tangenti in punti di una sezione iperpiana

Linienflächen (Archiv der Mathematik und Physik, Dritte Reihe, Band XVIII, 1911, pp. 66-68); E. Bompiani, *Alcune proprietà proiettivo-differenziali dei sistemi di rette negli iperspazi* (Rendic. del Circolo matematico di Palermo, tomo XXXVII, 1914, pp. 305-331); A. Terracini, *Su alcune superficie rigate razionali* (Rendic. del Reale Istituto lombardo di Scienze e Lettere, vol. XLVIII, pp. 62-76; ved. il n. 4).

(1) Per $r=2$, $p=0$, cfr. Morale, loc. cit. (1); per $r=2$ e p qualunque, il risultato è enunciato dal prof. Segre nel suo articolo, in corso di stampa, *Mehrdimensionale Räume*, della *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*.

della F è di classe m , sarà $\varrho = 2m - l$. E poichè, per quanto è detto sopra, i ϱ S_{2r-2} ($r - 1$)-tangenti in punti di a^n e di b^n sono dati dagli S_{2r-2} ($r - 1$)-tangenti negli n punti comuni ad a^n e a b^n , e dai β S_{2r-2} ($r - 1$)-tangenti singolari, mentre l esprime il numero delle generatrici singolari per una superficie di ordine n e di genere p dello S_{2r-2} (proiezione della F^n da una retta generica dello S_{2r-1}) cioè $l = \beta(n, p, 2r - 3)$, e m non è che l'ordine della curva trasversale di una superficie dello S_{2r-2} , pure d'ordine n e genere p (proiezione della F^n data nello S_{2r-1} , fatta da un punto generico), ossia $m = \gamma(n, p, 2r - 2)$, si conclude:

$$(2) \quad \beta(n, p, 2r - 1) = 2\gamma(n, p, 2r - 2) - \beta(n, p, 2r - 3) - n.$$

Questa formola, insieme con la (1), ci permette di ricavare

$$(3) \quad \begin{cases} \gamma(n, p, 2r) = (r + 1)n + 2r^2(p - 1) \\ \beta(n, p, 2r - 1) = rn + 2r(r - 1)(p - 1). \end{cases}$$

Infatti, per $r = 2$, la seconda delle (3) è notoriamente valida, ed è quindi, come mostra la (1), valida anche la prima; e dalle (1) e (2) segue poi subito che, se le (3) sussistono fino a un certo valore di r , sussistono anche per valore successivo. Così concludiamo:

In generale una superficie rigata di S_{2r} , di ordine n e genere p , ha una curva trasversale d'ordine

$$(r + 1)n + 2r^2(p - 1).$$

E anche:

In generale, una superficie rigata di S_{2r-1} , d'ordine n e di genere p , ha $rn + 2r(r - 1)(p - 1)$ generatrici singolari (cioè situate in un iperpiano con le $r - 1$ consecutive).

Per calcolare l'ordine $\omega(n, p, 2r)$ della ∞^1 di S_{r-1} trasversale della Φ , possiamo ancora applicare un procedimento ricorrente, non dissimile, in sostanza, da quello adoperato dal Morale nel caso particolare da lui considerato. Se Φ' è la proiezione generica della Φ sopra uno S_{2r-1} , e se Γ' è la proiezione della curva trasversale, gli S_{r-1} , appoggiati a $r + 1$ generatrici consecutive della Φ , si proiettano negli S_{r-1} passanti per singoli punti di Γ' e appoggiati a r generatrici consecutive a quelle cui appartengono quei punti. Determiniamo anzitutto l'ordine della varietà di questi ∞^1 S_{r-1} , ossia il numero di quelli tra essi che si appoggiano a uno S_{r-1} generico, π_{r-1} . A tal uopo consideriamo, sopra Γ' , la corrispondenza in cui sono omologhi due punti A_1, A_2 , tali che A_2 sia ulteriore intersezione della Γ' con uno S_{r-1} appoggiato a π_{r-1} , alla generatrice per A_1 e ad altre $r - 1$ ad essa consecutive. Queste r generatrici, quando sia fissato A_1 , determinano con π_{r-1} , quale varietà degli S_{r-1} appoggiati ad esse e a π_{r-1} , una V_{2r-2}^r ,

per cui ciascuna delle r generatrici ha molteplicità $r-1$; cosicchè la corrispondenza è a valenza $r(r-1)$, e ad A_1 corrispondono $r[(r+1)n + + 2r^2(p-1)] - r(r-1)$ punti A_2 : il numero dei punti A_1 corrispondenti ad A_2 è poi dato dal numero degli S_{r-2} , trasversali della rigata d'ordine $n-1$ e genere p di uno S_{2r-2} (in cui la Φ' si proietti dal punto A_2) che si appoggiano ad uno S_{r-1} generico; ossia ad A_2 corrispondono $\omega(n-1, p, 2r-2)$ punti A_1 . I punti uniti della corrispondenza sono pertanto

$$r[(r+1)n + + 2r^2(p-1)] - r(r-1) + \omega(n-1, p, 2r-2) + 2r(r-1)p.$$

Tra essi sono da contarsi, ciascuno $r-1$ volte, i punti di intersezione della Γ' colle generatrici singolari della Φ' , per ciascuno dei quali passano $r-1$ S_{r-1} appoggiati a π_{r-1} e a $r+1$ generatrici consecutive della Φ' , S_{r-1} che tuttavia non sono, in generale, proiezioni di S_{r-1} appoggiati a $r+1$ generatrici consecutive della Φ . Ricordando che quelle generatrici singolari sono $rn + 2r(r-1)(p-1)$, resta dunque

$$(4) \quad \omega(n, p, 2r) = \omega(n-1, p, 2r-2) + \\ + 2rn + (5r^2 - 3r)(p-1) + r(r-1)p,$$

da cui segue

$$(5) \quad \omega(n, p, 2r) = r(r+1)n + r(r+1)(2r-1)(p-1),$$

poichè tal formola, valida per $r=1$ [allora essa porge $\omega=2(n+p-1)$ e coincide con quella che assegna l'ordine di una curva piana di classe n e genere p]. si dimostra per induzione ricorrendo alla (4).

In generale, una superficie rigata di S_{2r} , di ordine n e genere p , ha una ∞^1 di S_{r-1} trasversale d'ordine

$$r(r+1)n + r(r+1)(2r-1)(p-1).$$

2. Si scorge facilmente, ed è noto (3), che in generale lo $S_{2r-1}(r-1)$ -tangente a una rigata di S_{2r} lungo la sua generatrice generica α , contiene lo spazio r -tangente alla curva trasversale Γ nel punto A situato su quella generatrice, mentre questo spazio non sta, generalmente, con lo $S_{2r-2}(r-2)$ -tangente lungo α in uno spazio di dimensione $< 2r-1$. Supposto ora $r > 1$, in quanti punti della curva trasversale si presenta la particolarità che lo spazio r -tangente e lo S_{2r-2} considerati stiano in uno S_{2r-2} (particolarità che può eventualmente essere dovuta all'altra, che lo spazio r -tangente alla Γ in A abbia dimensione $< r$)? Allora, e solo allora, si presenta anche l'altra circostanza che non solo lo spazio r -tangente, ma anche lo $S_{r+1}(r+1)$ -tangente a Γ in A è contenuto nello $S_{2r-1}(r-1)$ -tangente lungo α , oppure è sostituito da uno spazio $(r+1)$ -tangente di minor dimensione, almeno quando si supponga che mai r generatrici consecutive siano

linearmente dipendenti, e che mai $r+1$ generatrici consecutive stiano in un iperpiano. Se infatti $A(t)$ è il punto che descrive la curva trasversale, mentre $B(t)$ è un punto che descrive una curva direttrice generica, t essendo un parametro che, variando in un certo intervallo, individua le generatrici di un pezzo della rigata, si ha identicamente

$$|A, A', A'', \dots, A^{(r-1)}, A^{(r)}, B, B', B'', \dots, B^{(r-1)}| = 0,$$

dove $A' = \frac{dA(t)}{dt}$, ecc., e dove nelle varie linee del determinante si sostituiscano successivamente le coordinate proiettive omogenee dei punti considerati. Derivando rispetto a t , si ha ancora identicamente

$$|A, A', A'', \dots, A^{(r-1)}, A^{(r+1)}, B, B', B'', \dots, B^{(r-1)}| + \\ + |A, A', A'', \dots, A^{(r-1)}, A^{(r)}, B, B', B'', \dots, B^{(r-2)}, B^{(r)}| = 0.$$

Quando si presenta la prima delle due particolarità indicate, il secondo di questi determinanti è nullo, e tale è pertanto anche il primo. Dal che segue, nelle ipotesi fatte, che $A^{(r)}$ e $A^{(r+1)}$ stanno nello S_{2r-1} ($r-1$)-tangente lungo α ; e viceversa, se ciò avviene, segue, ancora in virtù della identità scritta, che fra i determinanti estratti dalla matrice

$$\|A, A', A'', \dots, A^{(r-1)}, A^{(r)}, B, B' B'', \dots, B^{(r-1)}, B^{(r)}\|,$$

sono nulli quelli ottenuti sopprimendo ciascuna delle due ultime colonne; cosicchè, non potendo annullarsi, nelle ipotesi fatte, la matrice, dovrà essere

$$\|A, A', A'', \dots, A^{(r-1)}, A^{(r)}, B, B', \dots, B^{(r-2)}\| = 0.$$

Per una rigata generica d'ordine n e genere p dello S_{2r} , i punti della curva trasversale, dove si presentano le due particolarità accennate, sono $(2r+1)n+2(2r^2+1)(p-1)$, come risulta considerando sulla curva trasversale la corrispondenza che nel n. 1 avevamo istituito sopra una sezione iperpiana della Φ , per dedurne l'ordine di Γ , corrispondenza che attualmente ha indici $(r+1)n+2r^2(p-1)-(r+1)$, e $rn+2r(r-1)(p-1)-(r+1)$, e valenza $r+1$.

In particolare, limitandoci a considerare una rigata generica Φ di S_4 , osserviamo che, in corrispondenza di ciascuno dei $5n+18(p-1)$ punti della curva trasversale Γ sopra considerati, si hanno altrettante generatrici della rigata trasversale Φ_1 che soddisfanno a particolari condizioni di incidenza colle generatrici infinitamente vicine; la presenza di ciascuna di queste singolarità abbassa l'ordine della curva e della rigata trasversale della Φ_1 , che coincidono rispettivamente con Γ e Φ , di tre e di sette unità.

Osserviamo infine che, se si considera una generica Φ^4 rigata razionale di S_4 , la sua curva trasversale è, come ho rilevato in altra occasione [loc. cit. (1)], una Γ^4 razionale sezione spaziale della superficie; per quanto precede, giacchè è assurda l'ipotesi che il piano osculatore alla Γ^4 in un suo punto (e quindi anche lo S_3 della Γ^4) contenga la generatrice passante per A, possiamo aggiungere che *la Γ^4 di S_3 , curva trasversale di una generica superficie rigata razionale Φ^4 della S_4 , è dotata di due tangenti di flesso.*

Questo risultato si può confermare direttamente, considerando la Φ^4 come proiezione di una rigata razionale normale F^4 di uno S_5 . Se questa è rappresentata parametricamente ponendo le coordinate proiettive omogenee di un suo punto proporzionali a $1, \lambda, \lambda^2, \mu, \mu\lambda, \mu\lambda^2$, e se il centro di proiezione è un punto generico O ($x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$), la curva trasversale della Φ^4 è (cfr. la mia Nota citata) la proiezione della C^4 sezione della F^4 mediante l'iperpiano (passante per O) di coordinate $x_5, -2x_4, x_3, -x_2, 2x_1, -x_0$: i punti di questa curva si ottengono dunque assumendo $\mu = \frac{x_3\lambda^2 - 2x_4\lambda + x_5}{x_0\lambda^2 - 2x_1\lambda + x_2}$. E allora si verifica che i piani osculatori alla C^4 , nei punti corrispondenti ai due valori di λ che sono radici della

$$\begin{vmatrix} \lambda x_1 - x_2 & \lambda x_4 - x_5 \\ \lambda x_0 - x_1 & \lambda x_3 - x_4 \end{vmatrix} = 0$$

passano per O; le tracce di questi piani sullo S_4 della Φ^4 sono dunque tangenti di flesso per Γ^4 .

Matematica. — *Sulla ricerca delle funzioni primitive.* Nota di LEONIDA TONELLI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

I metodi fino ad ora proposti per dimostrare che una funzione assolutamente continua può ottenersi integrando la sua derivata — considerata là dove esiste — sono tre. Il primo, in ordine di tempo, è del Lebesgue, ed è fondato sulla considerazione delle *catene d'intervalli* (2), che potrebbero anche dirsi *successioni transfinite d'intervalli contigui*, e, secondo alcuni, presenta l'inconveniente di ricorrere al *transfinito*. Il secondo, dovuto

(1) Cfr. Bompiani, loc. cit. pag. 159 in nota.

(2) Una *catena d'intervalli* (ved. H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration etc.*, p. 63) è un aggregato ordinato d'intervalli non sovrapponentesi di una retta (e quindi necessariamente numerabile), nel quale l'ordine è quello stesso con cui gli intervalli sono disposti sulla retta. In esso, inoltre, ogni intervallo è contiguo all'immediatamente precedente, se questo immediatamente precedente esiste; e, nel caso contrario, ha come primo estremo il limite superiore dei secondi estremi degli intervalli che lo precedono.

al Vitali, si basa sul concetto di *nucleo* di un insieme d'intervalli ⁽¹⁾, e su un teorema geometrico ad esso relativo, per il quale, se m è la misura del nucleo, si può, dall'insieme considerato, estrarre un numero finito o una infinità numerabile di intervalli, due a due distinti, di lunghezza complessiva non minore di m . Il terzo, infine, quello del De la Vallée Poussin ⁽²⁾, deriva dalla considerazione delle *funzioni maggiorante e minorante*, relative ad una funzione $f(x)$ integrabile, le quali rappresentano, in tutto l'intervallo dato (a, b) , l'integrale $\int_a^b f(x) dx$ con una approssimazione prefissata ad arbitrio, la prima per eccesso, la seconda per difetto, ed hanno i loro numeri derivati tutti superiori, la prima, tutti inferiori, la seconda, a $f(x)$. I due ultimi metodi non si servono per nulla del transfinito, ma risultano, a confronto col primo, assai più laboriosi.

In ciò che segue mi propongo di esporre un nuovo metodo, che mi sembra più elementare ed anche più intuitivo di quelli sopra menzionati. Io prendo le mosse dalla seguente osservazione: È noto che una funzione continua $f(x)$, data in un intervallo (a, b) , può rappresentarsi con quella approssimazione che si vuole, mediante l'ordinata $\varphi(x)$ di una poligonale inscritta nella curva rappresentatrice della funzione medesima. Orbene, se la funzione considerata è anche a variazione limitata, la $\varphi(x)$ non solo rappresenta, come abbiamo detto, la $f(x)$, ma serve pure a darci, con la sua derivata, una rappresentazione *quasi completa* della derivata $f'(x)$. Con maggior precisione possiamo dire che, *preso arbitrariamente un ε positivo, è possibile di determinare un $\delta > 0$ tale che, se le ascisse dei vertici consecutivi della poligonale $y = \varphi(x)$, inscritta in $y = f(x)$, differiscono fra loro per meno di δ , è $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ in tutto (a, b) , e $|f'(x) - \varphi'(x)| < \varepsilon$ in tutto (a, b) , fatta eccezione, al più, per i punti di una successione d'intervalli, non sovrapponentesi, di lunghezza complessiva minore di ε .* [Se togliamo la condizione della continuità della $f(x)$, vale a dire, se tale funzione è solo a variazione limitata, la $\varphi(x)$ dà, di essa, non più una rappresentazione completa, ma quasi completa, e resta poi ancora quasi completa la rappresentazione che della $f'(x)$ dà la $\varphi'(x)$]. Sfruttando l'osservazione ora fatta, si può confrontare facilmente l'integrale della $f'(x)$ con quello della $\varphi'(x)$. Da questo confronto scende senz'altro la proposizione voluta.

(¹) Secondo il Vitali (*Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali*, in Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, 1907-1908), un punto P fa parte del nucleo di un sistema d'intervalli se, comunque si scelga un $\varepsilon > 0$, esiste sempre qualche intervallo del sistema, di lunghezza $< \varepsilon$, al quale appartenga P .

(²) *Cours d'Analyse infinitésimale*, tome I (3^e édit., pag. 269).

1. — DERIVABILITÀ, QUASI DAPPERTUTTO, DI UNA FUNZIONE
A VARIAZIONE LIMITATA.

Sia $f(x)$ una funzione a variazione limitata, data nell'intervallo (a, b) . Supponiamo senz'altro, nei ragionamenti che seguono, che la $f(x)$ sia anche continua (ipotesi necessaria per il teorema del n. 4, al quale vogliamo arrivare), lasciando al lettore di fare le poche e lievi modificazioni indispensabili nel caso della discontinuità.

Per essere la $f(x)$ a variazione limitata, la curva $y = f(x)$, $(a \leq x \leq b)$ ha una lunghezza finita, che indicheremo con L . Dividiamo l'intervallo (a, b) in parti, in modo arbitrario, mediante i punti $a = x^{(0)} < x^{(1)} < \dots < x_m = b$, e indichiamo con $P^{(0)}, P^{(1)}, \dots, P^{(m)}$ i punti corrispondenti della curva $y = f(x)$. La poligonale π , avente questi punti come vertici successivi [poligonale inscritta in $y = f(x)$], ha una lunghezza non superiore a L , che indicheremo con la stessa lettera π . Consideriamo una qualunque delle parti in cui (a, b) è stato diviso, la $(x^{(r-1)}, x^{(r)})$, e in essa due punti x e x' , ai quali corrisponderanno sulla nostra curva i punti P e P' . Indichiamo con $\alpha(\overline{P^{(r-1)} P^{(r)}}, \overline{PP'})$ l'angolo, compreso fra 0 e π , che il segmento orientato $\overline{P^{(r-1)} P^{(r)}}$ fa col segmento orientato $\overline{PP'}$ o con $\overline{P'P}$, a seconda che è $x < x'$ oppure $x > x'$. Se allora $\delta \equiv (x, x')$ è un qualsiasi intervallo non nullo appartenente a $(x^{(r-1)}, x^{(r)})$, ed ε è un arbitrario numero positivo < 1 , si possono costruire, per la funzione $F(\delta) = \alpha(\overline{P^{(r-1)} P^{(r)}}, \overline{PP'}) - \varepsilon$ e relativamente all'intervallo $(x^{(r-1)}, x^{(r)})$, i due sistemi d'intervalli \mathcal{A} e $\overline{\mathcal{A}}$, definiti nel n. 1 della mia Nota *Successioni di curve e derivazione per serie* (⁴), e che contrassegneremo con l'indice r , scrivendo $\mathcal{A}^{(r)}$ e $\overline{\mathcal{A}}^{(r)}$.

Dal modo di costruzione di questi intervalli risulta: 1°) $\sum_n \overline{\mathcal{A}}_n^{(r)} \leq 8 \sum_n \mathcal{A}_n^{(r)}$;
2°) se P e P' corrispondono agli estremi di uno stesso $\mathcal{A}_n^{(r)}$, è

$$\alpha(\overline{P^{(r-1)} P^{(r)}}, \overline{PP'}) \geq \varepsilon;$$

3°) se (x, x') è un intervallo di $(x^{(r-1)}, x^{(r)})$ avente un estremo esterno a tutti gli intervalli $\mathcal{A}_n^{(r)}$ ($n = 1, 2, \dots$), è

$$\alpha(\overline{P^{(r-1)} P^{(r)}}, \overline{PP'}) < \varepsilon.$$

Consideriamo ora i sistemi $\mathcal{A}^{(r)}$ e $\overline{\mathcal{A}}^{(r)}$ relativi a tutti i valori di r , da 1 a m , e cerchiamo un limite superiore per la somma $\sum_{r=1}^m \sum_n \mathcal{A}_n^{(r)}$. Fra

(⁴) Questi Rendiconti, gennaio, 1916. Per il caso della $f(x)$ discontinua, osserviamo che quanto è detto al n. 1 citato, dipende solo dalla semicontinuità superiore della $F(\delta)$.

tutti gli intervalli $A_n^{(r)}$ ($r = 1, 2, \dots, m$; $n = 1, 2, \dots$) scegliamone ad arbitrio p , e indichiamoli con A_1, A_2, \dots, A_p . Inscriviamo, nella curva $y = f(x)$, la poligonale π' prendendo come vertici quelli della π ed i punti corrispondenti agli estremi di A_1, A_2, \dots, A_p , intendendo che i vertici di π' si seguano nello stesso ordine nel quale si presentano le loro ascisse. Indicando con π' anche la lunghezza di π' , abbiamo $\pi' - \pi < L - \pi$.

Detta π'_1 la parte di π' relativa ai segmenti A_1, A_2, \dots, A_p , e π'_2 la rimanente, poichè ogni lato $\overline{P^{(r-1)} P^{(r)}}$ di π è minore o uguale alla parte di π'_1 , che gli corrisponde, moltiplicata per $\cos \varepsilon$, più quella di π'_2 , si ha

$$\begin{aligned} \pi &= \sum_1^m \overline{P^{(r-1)} P^{(r)}} \leq \\ &\leq \pi'_1 \cos \varepsilon + \pi'_2 = \pi' - \pi'_1 (1 - \cos \varepsilon), \quad \pi'_1 < \frac{\pi' - \pi}{1 - \cos \varepsilon} < 3 \frac{L - \pi}{\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Ed essendo $A_1 + A_2 + \dots + A_p \leq \pi'_1$, ne viene, per l'arbitrarietà con cui i A_p sono stati scelti, $\sum_{r=1}^m \frac{A_n^{(r)}}{n} \leq 3 \frac{L - \pi}{\varepsilon^2}$ ed anche $\sum_{r=1}^m \frac{\bar{A}_n^{(r)}}{n} < \varepsilon$ se è $L - \pi < \frac{\varepsilon^3}{9}$. Dunque, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$ e < 1 , è possibile di determinare un $\delta > 0$ tale che, se è, per ogni r da 1 a m , $x^{(r)} - x^{(r-1)} \leq \delta$ ⁽¹⁾, fatta eccezione, al più, per i punti di (a, b) appartenenti ad un'infinità numerabile di segmenti $\bar{A}_n^{(r)}$ ⁽²⁾, di lunghezza complessiva $< \varepsilon$, per ogni altro x vale la seguente proprietà: essendo x' un punto qualunque, appartenente, con x , ad uno stesso $(x^{(r-1)}, x^{(r)})$, è

$$\alpha(\overline{P^{(r-1)} P^{(r)}}, \overline{P P'}) < \varepsilon.$$

Se x'' è un altro punto di $(x^{(r-1)}, x^{(r)})$, si ha anche, per gli stessi x , $\alpha(\overline{P P''}, \overline{P P'}) < 2\varepsilon$. Allora, sostituendo ad ε , via via, $\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2^2}, \frac{\varepsilon}{2^3}, \dots$, si vede che, fatta al più eccezione per i punti di (a, b) appartenenti ad un'infinità numerabile di segmenti di lunghezza complessiva $< 2\varepsilon$, per tutti gli altri esiste la derivata $f'(x)$, finita o no: con altre parole, la $f'(x)$ esiste, finita o no, quasi dappertutto. Vediamo dove la $f'(x)$ può essere infinita. Indichiamo con l' la somma delle lunghezze di quei lati

(1) È $L - \pi < \frac{\varepsilon^3}{9}$, e quindi Se la $f(x)$ non è continua, non è possibile, in generale, di determinare il δ nel modo detto. In tal caso si dirà: se i punti $x^{(r)}$ sono scelti in modo che sia $L - \pi < \frac{\varepsilon^3}{9}$

(2) Questi $\bar{A}_n^{(r)}$ dipendono dal modo col quale si seelgono gli $x^{(r)}$.

di π che formano, con l'asse delle x , un angolo $\geq \frac{\pi}{2} - 2\epsilon$, lati le cui proiezioni sull'asse detto hanno perciò una somma $\leq l' \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\epsilon\right) < L \sin 2\epsilon$. Per tutti gli altri lati di π , l'angolo formato con l'asse delle x è $< \frac{\pi}{2} - 2\epsilon$; e, per quanto sopra si è stabilito, tutte le corde della curva $y = f(x)$ che si proiettano interamente sulla proiezione di uno di tali lati, e in modo che uno almeno dei loro estremi venga proiettato fuori dei $\bar{A}_n^{(r)}$, formano con l'asse delle x un angolo $< \frac{\pi}{2} - \epsilon$. E se ne deduce che, se x è un punto della proiezione di uno di questi lati ed è esterno ai $\bar{A}_n^{(r)}$, e se in esso esiste la $f'(x)$, tale derivata è, in modulo, minore di $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \epsilon\right)$.

Dunque, quasi dappertutto fuori dei $\bar{A}_n^{(r)}$ e delle proiezioni dei lati di π che formano l' , cioè quasi dappertutto fuori di una successione di segmenti di lunghezza complessiva $< \epsilon + L \sin 2\epsilon$, la derivata $f'(x)$ esiste determinata e finita e, in modulo, minore di $\operatorname{cotg} \epsilon$. Ciò prova che una funzione a variazione limitata ha quasi dappertutto derivata finita.

2. — RAPPRESENTAZIONE APPROSSIMATA DELLA $f'(x)$.

Detto p un numero intero positivo, determiniamo ω in modo che sia $\cos\left(\omega - \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p}$ e $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$. Allora, per ogni ϵ positivo e $\leq \frac{1}{p}$, si ha $\cos(\omega - \epsilon) \leq \frac{1}{p}$. Fissato uno degli ϵ detti, i lati della poligonale π , i quali formano con l'asse delle x un angolo $\geq \omega - \epsilon$, danno alla lunghezza di π un contributo che indicheremo con l_1 , ed hanno, sull'asse detto, delle proiezioni la cui lunghezza complessiva è $< l_1 \cos(\omega - \epsilon) < \frac{L}{p}$. Quasi dappertutto sulle proiezioni dei lati rimanenti, e fuori dei $\bar{A}_n^{(r)}$, la $f'(x)$ esiste ed è, in modulo, $< \operatorname{tg} \omega$.

Indichiamo con E_ϵ l'insieme dei punti delle proiezioni ora dette, esterni ai $\bar{A}_n^{(r)}$, con $\varphi(x)$ l'ordinata della π , con $\omega_1(x)$ e $\omega_2(x)$ gli angoli che le tangenti alle curve $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ formano con l'asse delle x . È, su E_ϵ ,

$$f'(x) - \varphi'(x) = \operatorname{tg} \omega_1 - \operatorname{tg} \omega_2 = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\cos^2 \bar{\omega}},$$

dove $\bar{\omega}$ è un valore convenientemente scelto fra ω_1 e ω_2 ; e perciò (n. 1)

$$|f'(x) - \varphi'(x)| < \frac{\epsilon}{\cos^2 \bar{\omega}}.$$

Siccome ε lo possiamo prendere piccolo ad arbitrio, la proposizione enunciata nell'introduzione, è provata.

3. — INTEGRABILITÀ DI $f'(x)$.

Sull'insieme E_ε la $f'(x)$, essendo limitata ($|f'(x)| < \operatorname{tg} \omega$), è integrabile e si ha, per la disuguaglianza precedente,

$$\int_{E_\varepsilon} |f'(x)| dx < \int_{E_\varepsilon} |\varphi'(x)| dx + \frac{\varepsilon(b-a)}{\cos^2 \omega} < \int_a^b |\varphi'(x)| dx + \frac{\varepsilon(b-a)}{\cos^2 \omega}.$$

L'integrale di $|\varphi'(x)|$ dà evidentemente la variazione totale di $\varphi(x)$ su (a, b) , variazione che è non superiore a quella V di $f(x)$. È dunque

$$\int_{E_\varepsilon} |f'(x)| dx < V + \frac{\varepsilon(b-a)}{\cos^2 \omega}.$$

Ora è $m(E_\varepsilon) > (b-a) - \frac{L}{p} - \varepsilon \geq (b-a) - \frac{1}{p}(L+1)$ e $m(E_\varepsilon) \rightarrow b-a$ per $p \rightarrow \infty$. E poichè, per ogni p , possiamo sempre determinare ε in modo che sia $\frac{\varepsilon(b-a)}{\cos^2 \omega} \leq \frac{1}{p}$, ne viene che la $|f'|$ è integrabile su tutto (a, b) , e si ha

$$\int_a^b |f'| dx \leq V.$$

4. — INTEGRALE DELLA DERIVATA DI UNA FUNZIONE ASSOLUTAMENTE CONTINUA.

Se la $f(x)$ è assolutamente continua, essa è anche continua e a variazione limitata; e dalla disuguaglianza del n. 2 si ricava, su tutto E_ε ,

$$f'(x) = \varphi'(x) + \frac{\varepsilon}{\cos^2 \omega} \theta(x),$$

con $|\theta(x)| < 1$. Dunque

$$\int_{E_\varepsilon} f' dx = \int_{E_\varepsilon} \varphi' dx + \frac{\varepsilon}{\cos^2 \omega} \int_{E_\varepsilon} \theta dx = \int_{E_\varepsilon} \varphi' dx + \frac{\varepsilon m(E_\varepsilon)}{\cos^2 \omega} \theta_\varepsilon,$$

con $|\theta_\varepsilon| < 1$; ed anche

$$\int_{E_\varepsilon} f' dx = \int_a^b \varphi' dx - \int_{C_\varepsilon} \varphi' dx + \frac{\varepsilon m(E_\varepsilon)}{\cos^2 \omega} \theta_\varepsilon,$$

dove C_ϵ indica il complementare di E_ϵ . E poichè la curva $y = f(x)$ è una poligonale coi vertici sulla $y = f(x)$, si ha

$$(1) \quad \int_a^b \varphi' dx = \varphi(b) - \varphi(a) = f(b) - f(a) - \int_{C_\epsilon} \varphi' dx + \frac{\epsilon m(E_\epsilon)}{\cos^2 \omega} \theta_\epsilon.$$

Troviamo un limite superiore per il modulo di $\int_{C_\epsilon} \varphi' dx$. Osserviamo che il gruppo C_ϵ è costituito di due parti: una è formata dalle proiezioni di tutti quei lati di π che con l'asse delle x fanno un angolo $\geq \omega - \epsilon$, proiezioni che indicheremo con $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_r, b_r)$, e per le quali è $(b_1 - a_1) + \dots + (b_r - a_r) < \frac{L}{p}$; e l'altra è composta di un insieme di punti appartenenti alle proiezioni dei lati di π che con l'asse delle x fanno un angolo $< \omega - \epsilon$, ed ha una misura $< \epsilon$. Il contributo di questa seconda parte in $\int_{C_\epsilon} \varphi' dx$ è quindi, in modulo, $< \epsilon \operatorname{tg} \omega$; invece quello della prima è precisamente

$$\begin{aligned} & \{ \varphi(b_1) - \varphi(a_1) \} + \dots + \{ \varphi(b_r) - \varphi(a_r) \} = \\ & = \{ f(b_1) - f(a_1) \} + \dots + \{ f(b_r) - f(a_r) \}. \end{aligned}$$

È dunque

$$(2) \quad \left| \int_{C_\epsilon} \varphi' dx \right| < \epsilon \operatorname{tg} \omega + \left| \sum_{s=1}^r \{ f(b_s) - f(a_s) \} \right|.$$

Scelto un $\eta > 0$ ad arbitrio, determiniamo p in modo che si abbia:
 1°) $\frac{1}{p} \leq \gamma$; 2°) per qualsiasi sistema di intervalli non sovrapponitisi di (a, b) : $(a_1, b_1), \dots, (a_r, b_r)$, tali che $\sum_{s=1}^r (b_s - a_s) \leq \frac{L}{p}$,

$$(3) \quad \left| \sum_{s=1}^r \{ f(b_s) - f(a_s) \} \right| \leq \eta$$

[ciò per l'assoluta continuità della $f(x)$]; 3°) per qualsiasi insieme misurabile E di (a, b) , tale che $m(E) \geq (b - a) - \frac{1}{p}(1 + L)$,

$$(4) \quad \left| \int_E f' dx - \int_a^b f' dx \right| \leq \eta.$$

Fatto ciò, prendiamo ε uguale al minore dei due numeri $\frac{1}{p}$ e $\frac{\cos^2 \omega}{p(b-a)}$.

Ne viene, allora, per (1), (2), (3), (4),

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f' dx - \{f(b) - f(a)\} \right| &< \eta + \frac{\operatorname{tg} \omega \cdot \cos^2 \omega}{p(b-a)} + \eta + \frac{1}{p} \\ &< \eta \left(3 + \frac{1}{b-a} \right). \end{aligned}$$

Siccome η è arbitrario, resta dimostrato che, se la $f(x)$ è assolutamente continua, è

$$\int_a^b f' dx = f(b) - f(a).$$

Se, invece di partire dalla uguaglianza $f'(x) = g'(x) + \frac{\varepsilon}{\cos^2 \omega} \theta(x)$, valida su E_ε , si parte dall'altra $|f'(x)| = |g'(x)| + \frac{\varepsilon}{\cos^2 \omega} |\theta(x)|$, si ottiene

$$\int_a^b |f'| dx = V,$$

dove V indica la variazione totale della f in (a, b) .

Fisica. — Intorno ad alcuni modi di calcolare l'esperienza di Clermont-Desormes. Nota di G. GUGLIELMO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Ricerche sulle combinazioni sub-alogenate di alcuni elementi. IV: Sul cosiddetto sottobromuro di bismuto.* Nota di L. MARINO e R. BECARELLI, presentata dal Socio R. NASINI.

In una precedente Nota ⁽¹⁾ abbiamo riportato una serie di valori sul contenuto in bromo dei singoli strati che si originano per la fusione di miscugli di bismuto e bromo. Riferiamo ancora su altri dati riguardanti lo stesso argomento. Secondo il nostro modo di vedere, le differenze che si osservano nella tabella 3^a della nostra terza Nota, anche se dovute in parte alla natura stessa dei cristalli ottenuti, sarebbero certamente minori ove fosse possibile realizzare una ben netta separazione meccanica, resa molto difficile dalle condizioni in cui si è costretti ad operare. Se si effettua infatti una nuova separazione meccanica sul prodotto già meccanicamente separato col solito dispositivo, i singoli valori sono più vicini fra loro e anche più costanti. Rimescolando su una fitta rete di nickel i fragili cristalli aghiformi ottenuti nel solito modo da miscugli al 13,4 %, al 24,12 %, al 29,48 % di bromo allo scopo di poter separare le particelle incluse nel reticolato cristallino e facendo l'analisi sulla polvere dei cristalli passata attraverso alla rete stessa, si ottennero i risultati della seguente tabella, i quali comprovano quanto noi diciamo.

TABELLA 1^a.

Percento di bromo nel miscuglio	Sostanza analizzata in gr.	cc. Ag NO ₃ %/10 consumato	Contenuto in bromo nello strato non fuso a 270°
13,40	0,2981	9,2	24,69 %
"	0,4496	13,5	24,06 "
24,12	0,6662	21,2	25,16 "
"	0,5864	18,8	25,65 "
"	0,3918	13,0	26,62 "
"	1,8198	59,2	26,02 "
29,48	0,3867	11,1	23,00 "
"	0,6054	17,8	23,57 "

(¹) Rend. R. Acc. Lincei [5], 25, pag. 105. Per quanto riguarda il contributo sperimentale portato da ciascuno di noi nell'esecuzione del presente lavoro, vedere la nostra Nota II, pag. 625.

La massa cristallina aghiforme non può essere ritenuta come vero e proprio composto, ma come formata da una serie di cristalli misti, perchè, oltre alla variabile composizione su citata e al punto di fusione che, (come vedremo, è compreso in un intervallo di temperatura abbastanza esteso) si riscontra che, se detta massa si fonde nelle identiche condizioni, dà origine di nuovo agli stessi strati che si formano direttamente dai miscugli primitivi di bismuto e bromo, o di bismuto e tribromuro.

Difatti fondendo 150-200 gr. di un miscuglio al 18,75 % di bromo, separando la massa cristallina e costruendone, dopo la purificazione su rete

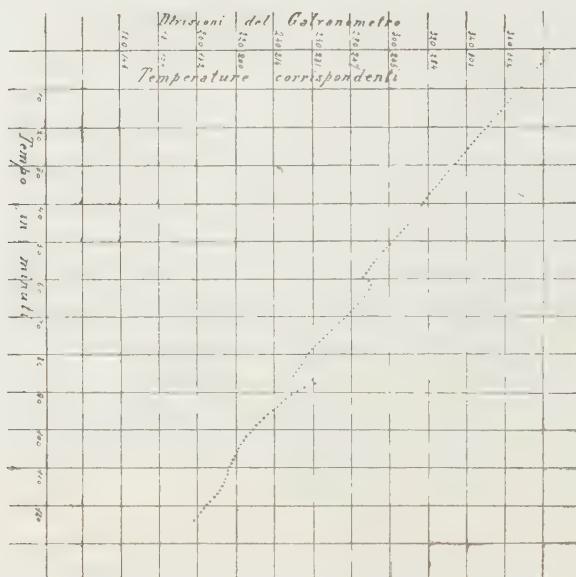


FIG. 1. — Curva di raffreddamento dello strato cristallino separato dal miscuglio al 18,75 % di Br.

di nickel, la curva di raffreddamento, essa — quando si operi, come al solito, con 50 gr. di questo nuovo prodotto — risulta quasi identica a quella risultante dal miscuglio al 35 % di bromo: si ha cioè un piccolo arresto verso 255°, seguito dal solito effetto termico fra 224° e 230° nonchè da quello più basso, a 200°. Dopo la rottura del tubo, il solido, per leggera percussione, si divide nettamente in due parti, analogamente a quanto era stato osservato per tutti gli altri miscugli (curva fig. 1).

Era perciò necessario di assicurarci se, col variare delle concentrazioni, si poteva o no stabilire il principio e la fine della fusione per ogni singola miscela cristallina separata. Avremmo così subito rilevato se, oltre all'esistenza di cristalli misti, poteva anche realizzarsi per essi un massimo di temperatura nel quale la concentrazione atomica fosse esprimibile da un semplice rapporto di proporzionalità.

Data la mancanza o l'incertezza dell'inizio di cristallizzazione sulle curve di raffreddamento (ved. fig. 2), a causa del piccolo calore di formazione dei cristalli misti, esse non sono sufficienti per mettere in evidenza se esiste o no un tal punto distettico, rispetto alle due soluzioni solide che si dovrebbero in tal caso riscontrare ai due lati di esso; e quindi abbiamo cercato di seguire le variazioni dei singoli strati con adatto dispositivo, durante tutto l'intervallo misurabile di temperatura. Allo scopo di sottrarre il più rapidamente possibile all'azione dell'umidità (che influenza notevolmente i risultati) la sostanza che doveva servire in queste determinazioni, fonevamo i miscugli in tubi aventi un diametro interno di poco inferiore a quello nei quali si eseguiva l'esperienza finale.

Da ciascuna massa solida staccavamo facilmente, per semplice percussione, lo strato superiore, e si introduceva subito nel tubo *a* (ved. fig. 3), il quale, dopo fatto il vuoto, si chiudeva alla lampada. Il riscaldamento si otteneva in un fornino elettrico a resistenza costruito con filo di nickel avvolto su un cilindro di porcellana porosa, nel quale ad una conveniente altezza trovansi due corrispondenti aperture rettangolari per osservare il tubo posto all'interno. Un secondo recipiente esterno, munito anch'esso delle corrispondenti aperture, contiene il primo, e l'interspazio, di circa 3 cm., è riempito con farina fossile. Mediante due sottili lamine di mica impedivamo la corrente di aria, cosicchè la temperatura voluta mantenevasi con sufficiente costanza. L'insieme del dispositivo risulta chiaro dalla figura 3. La forma di tubo *a* riportata è quella che ha meglio servito al nostro scopo, tanto più che per le solite ragioni fummo costretti ad operare sempre nel vuoto. I tubi con la strozzatura quasi capillare verso la metà si mostrarono inadatti perchè al di sopra di 290° la tensione del tribromuro ritarda il passaggio del fuso attraverso il setto, cosicchè per un certo tempo il liquido può rimanere a contatto col solido. Nella nuova forma, invece, potendo mantenere in leggerissima aspirazione la pompa, il tribromuro distilla nel tratto esterno della branca laterale; e allora, mano a mano che la sostanza fonde coll'innalzarsi della temperatura, si vede sgocciolare il liquido attraverso il foro. La luce di questo deve essere fra 0,5 ed 1 mm. per esser sicuri che la sostanza non fusa non venga meccanicamente trascinata dal liquido assai denso. Sia chiudendo il tubo con un tappo di gomma attraversato dal termometro che si affonda nella sostanza, sia chiudendolo alla lampada e prendendo la temperatura corretta data dal termometro esterno, si giunge sempre agli stessi risultati finali.

Abbiamo così potuto confermare con ripetute esperienze che:

1°) da tutti gli strati superiori formatisi nei vari miscugli per la temperatura di 200°, si vede sgocciolare in maggiore o minore quantità, a seconda della composizione della mescolanza da cui proviene, un liquido

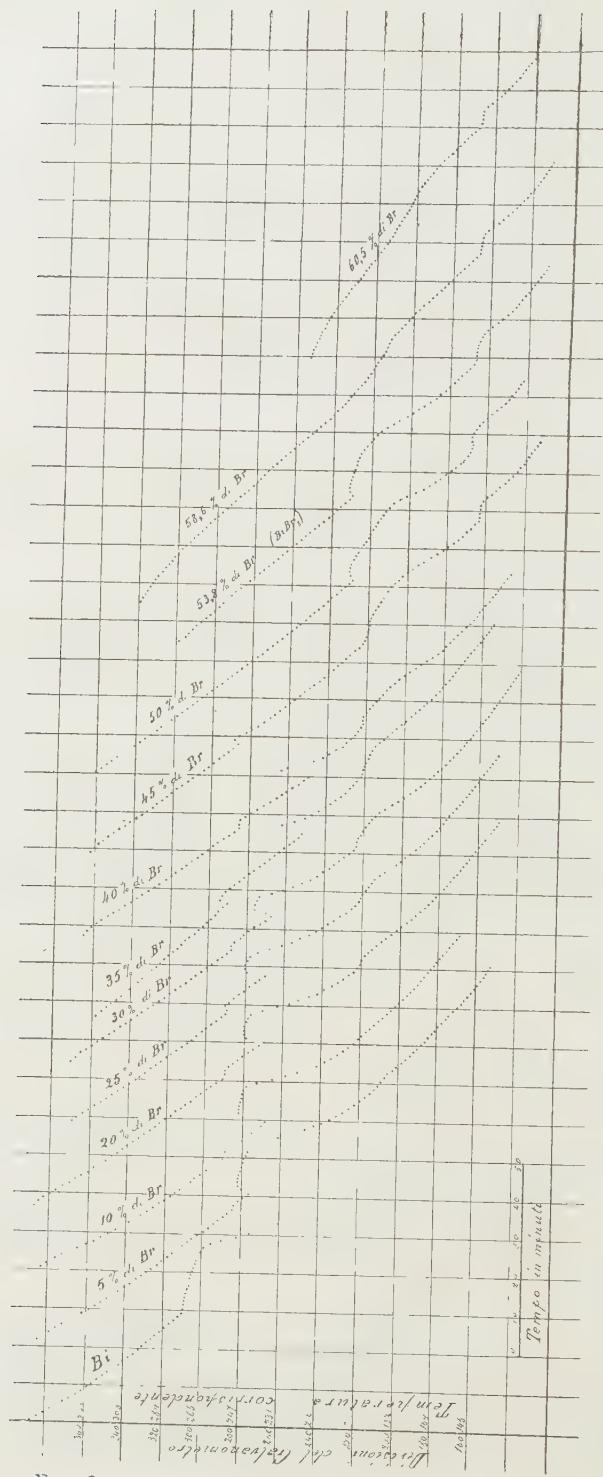


FIG. 2. — Curve di raffreddamento. Sistema Bi-Cl.

che, per raffreddamento, forma la sostanza nera, igroscopicissima, di cui abbiamo già parlato;

2°) rimane da ciascuno di questi strati un reticolato cristallino che fonde in un intervallo di temperatura che va da circa 270° a $300-305^{\circ}$ e che deve essere considerato come una serie di cristalli misti.

Confermato questo interessante risultato, cercammo allora di definire la composizione di essi rispetto a quella del liquido per le corrispondenti temperature; ma non ci riuscì ancora, per le condizioni speciali in cui si è costretti ad operare, di fissare con sicurezza le loro concentrazioni-limite.

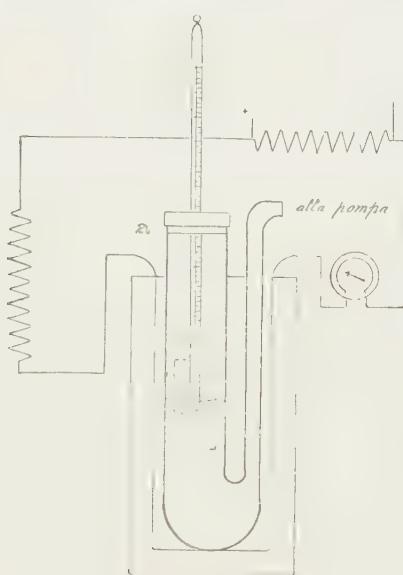


FIG. 3.

Si potrebbe domandare come mai il limite superiore di temperatura oscilla costantemente, qualunque sia il miscuglio da cui i cristalli provengono, fra 300° e 305° .

Questo si deve al fatto che, operando nelle su indicate condizioni, i cristalli che fondono per ultimi raggiunta quella temperatura, subiscono una decomposizione per la quale sublima il tribromuro mentre si libera bismuto che colo attraverso il setto. I due dispositivi dimostrano dunque chiaramente che esiste un intervallo di temperatura e che è superiore alla temperatura di fusione dei due componenti.

Stiamo tentando altri metodi con i quali speriamo di poter seguire l'eventuale tratto di curva posta al disopra di questa temperatura di decomposizione dei cristalli misti, sulla quale potrebbe trovarsi un ipotetico punto distettico.

Prima di concludere, sembra a noi indispensabile di rispondere ad una possibile obiezione. Si potrebbe cioè chiedere come possiamo noi dimostrare che realmente i cristalli subiscono una trasformazione in accordo con l'osservato sviluppo di calore capace di far risalire in modo così notevole la temperatura. La seguente esperienza mostra chiaramente quanto erano giuste le nostre supposizioni: In un tubo di vetro, nel quale vien praticato il vuoto, si fonde un miscuglio al 20 % di bromo. Il prodotto della fusione si passa rapidamente entro un tubo con strozzatura nel mezzo; e, fatto il vuoto, si si chiude alla lampada, si introduce con la sostanza in basso nel fornino già descritto, e si rifonde nuovamente fra 370° e 380° mantenendo costante la temperatura per alcune ore. Questa si fa poi discendere lentamente sino a 276°, e vi si mantiene per circa mezz'ora. Dopo, mediante un adatto dispositivo, si capovolge tutto il sistema e si tiene in questa posizione per circa 20 minuti perchè tutto il liquido possa passare attraverso la strozzatura. Fatto ciò, si inclina il forno in modo da disporlo quasi orizzontalmente; e si lascia raffreddare. Le temperature erano lette su due termometri legati esternamente al tubo: uno col bulbo in corrispondenza della strozzatura, l'altro col bulbo in corrispondenza dell'ultimo spazio occupato dalla sostanza. Si riscontra, in questo modo, che la sostanza rimasta al disopra del setto è formata da un reticolato cristallino e da un nucleo di bismuto metallico, mentre la parte colata è costituita dalla sostanza nera igroscopicissima. Risultando, dalle nostre esperienze, che il bismuto in presenza di tribromuro fonde al di sotto di 260°, ed avendo noi capovolto il forno a 276°, il nucleo di bismuto che non è passato attraverso il setto non può provenire se non dalla trasformazione dei cristalli α prima formatisi.

Anche l'analisi eseguita sulle due masse totali separate mostra come sia diversa la composizione dei cristalli α da quelli che noi abbiamo chiamato γ e che sono quelli separabili alla temperatura-ambiente. Difatti, gr. 38,03 di miscuglio al 20 % di Br dettero, di sostanza non colata a 276°, gr. 12,98. Questi consumarono di AgNO_3 (1 cc. = gr. 0,232 Ag = gr. 0,1719 di Br) cc. 25,3, a cui corrispondono gr. 33,8 % di Br.

L'interpretazione del diagramma (ved. fig. 1, Nota III) non può dunque essere che la seguente:

Per quantità di bromo inferiori al 5 % circa, quel poco di BiBr_3 che si forma abbassa di alcuni gradi il punto di fusione del bismuto.

Lungo la retta AB si separa del bismuto puro.

Per quantità di bromo comprese fra il 5 e il 35 % e per una temperatura sufficientemente elevata, superiore a 305° circa, si hanno due fasi liquide: L_1 e L_2 . Col raffreddamento, verso i 305°, dalla fase liquida L_1 si originano i cristalli α . Questi, a 255° circa, si trasformano in cristalli β . La linea x y del diagramma indica questa trasformazione. Nell'intervallo di temperatura compreso fra 255° e 238° circa, esistono quindi i cristalli β

in presenza della fase liquida L_2 . A 238° circa i cristalli β si scompongono (linea tratteggiata RS) e danno luogo a cristalli γ e al miscuglio eutettico $Bi + BiBr_3$, facendo risalire la temperatura fino al punto di fusione di questo, cioè verso i 250° (linea BC del diagramma).

Continuando il raffreddamento, intorno ai 200° solidifica la fase liquida L_2 costituente l'eutettico $BiBr_3 + Bi$ (linea DE).

Per quantità di bromo maggiori al 45% ma inferiori al 53,8%, per temperatura superiore ai 210° , si ha una sola fase liquida. Coll'abbassarsi della temperatura, lungo la linea LE cristallizza del $BiBr_3$ puro, e intorno ai 200° solidifica l'eutettico $BiBr_3 + Bi$.

Per concentrazioni superiori al 53,8% di bromo, lungo LM cristallizza del $BiBr_3$ puro.

La retta VZ, a circa 153° , indica una trasformazione in solido del $BiBr_3$ puro.

Da tutto quanto abbiamo esposto sul sistema bismuto-bromo risulta quindi evidente come sia da interpretarsi diversamente il lavoro dell'Eggink, sul quale ritorneremo dopo aver reso note le nostre osservazioni sul sistema bismuto-cloro, e come si giunge alle seguenti conclusioni:

1°) nella fusione dei miscugli di tribromuro di bismuto e bismuto non si ottiene nessun composto definito, ma, per un intervallo di concentrazione, una serie di cristalli misti (α);

2°) questi subiscono due trasformazioni: si trasformano cioè in una forma (β) la quale poi passa in una forma (γ), con notevole sviluppo di calore;

3°) il punto di fusione di questi cristalli (γ) è sempre superiore ai punti di fusione dei due componenti Bi e $BiBr_3$;

4°) da questi cristalli (γ), dopo la fusione completa, si riottengono nel raffreddamento cristalli α di altra composizione, in presenza di due strati liquidi che riproducono i medesimi fenomeni;

5°) a 153° il $BiBr_3$ mostra una trasformazione in solido.

Botanica. — *Sulla persistenza dello stilo sul frutto degli agrumi.* Nota di C. CAMPBELL, presentata dal Socio R. PIROTTA.

Le ricerche sugli agrumi del circondario di Gaeta, mi hanno portato a considerare la diversa forma che assume il limone, con la diversa fioritura da cui proviene, e la persistenza dello stilo sui frutti che provengono dalla fioritura invernale, e nel luogo designati col nome di « marzatici ».

Oltre che nei limoni, ho trovato frutti, in qualche annata anche numerosi, con stilo persistente sino a maturità, in tutte le forme colà coltivate del genere *Citrus*; e nell'arancio è dai coltivatori designata, per es., « arancia col pizzo » quella che in qualche annata si presenta con lo stilo persistente sino a matu-



FIG. 1.

rità (fig. 1 b). Nel limone gaetano, la persistenza dello stilo è però normale (fig. 1 a e a°); ed i limoni così costituiti, a causa della fragilità dello stilo, sono commercialmente deprezzati, in quanto, dalla ferita, tendono a marcire. A Fondi, per tale ragione, i coltivatori hanno la buona pratica di sopprimere lo stilo sul frutto, poco prima della completa maturità, in maniera che avvenga la cicatrizzazione della ferita prima della maturazione e, quindi, della raccolta, e il frutto non sia in seguito soggetto a deteriorarsi nelle cassette di imballaggio o nei magazzini.

Credo utile di ricordare come il limone gaetano, non debba confondersi col *limon caietanus* descritto e figurato dal Ferrari (¹), che illustra la forma nella contrada conosciuta sotto il nome di « limone di pane »; ed hanno quindi

(¹) J. B. Ferrari, *Hesperides sive de malorum aureorum cultura et usu: libri quatuor.* Romae, MDCXLVI.

ragione Risso e Poiteau (¹) quando ritengono insufficienti le descrizioni date per la varietà, per farla distinguere dalle altre. Dalle mie ricerche risulta poi che il frutto ha diversa conformazione morfologica secondo l'epoca della sua formazione e a seconda delle condizioni biologiche della pianta; fatti, il primo non studiato e curato dai citriografi, al secondo non data tutta quella importanza che può avere nella descrizione della varietà.

Il limone, quale pianta rifiorente, ha produzioni morfologicamente distinte secondo l'epoca della fioritura da cui provengono, e sulla stessa pianta si possono nello stesso momento trovare fiori e frutti in diverso grado di sviluppo.

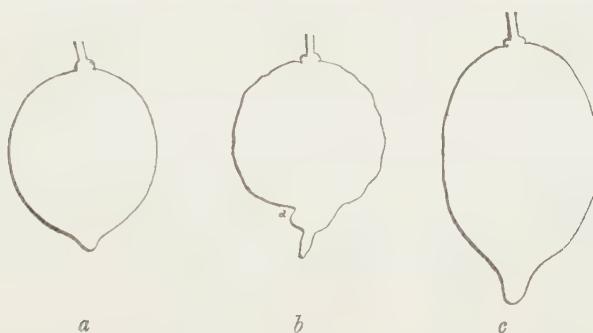


FIG. 2.

Ai citriografi è sfuggito il fatto, importantissimo, della diversa conformazione che assume il frutto secondo la fioritura da cui proviene, mentre la cosa ha notevole importanza biologica e pratica, in quanto dimostra quale e quanta influenza abbiano le condizioni esterne sulla conformazione del frutto, e quanto cauti bisogna andare nel definire la varietà, quando la forma del frutto, sulla stessa pianta, può tanto variare.

Il limone gaetano ha, così, tre distinte produzioni che corrispondono a tre distinte fioriture: il « settembrino (a) », il « maggiorino (c) » ed il « marzatico (b) »; il maggiorino commercialmente più apprezzato e ricercato (vedi fig. 2).

Il limone « marzatico », o della fioritura invernale, porta, come ho già detto, quasi costantemente e nella quasi totalità lo stilo persistente, mentre il fenomeno non si trova mai nelle due altre forme « settembrina » e « maggiorina ».

Il limone « marzatico » è ancora caratteristico per una più profonda insenatura (fig. 2 b a), designata dai coltivatori col nome di « carnaca ».

(¹) A. Risso e A. Poiteau, *Histoire naturelle des orangers*. Paris, 1818-1822.

Sulla persistenza dello stilo sul frutto degli agrumi, si hanno le seguenti notizie date da botanici e citriografi, che la persistenza dello stilo ingrossato sui frutti a completa maturazione, considerarono concordemente come caratteristica di date varietà.

Così il Ferrari (loc. cit.) descrive ed illustra le varietà *Limon pusillus calabriae* e *Limon sbardonius* con stilo persistente; Risso e Poiteau, le specie e varietà (loc. cit.); Bergamottier, ordinaire; id., « à fruit toruleux »; Limettier, « à petit fruit »; Limonier, « perette de St^e. Dominique »; id., « de sbardone »; id., « rosolin »; id., « perette de Florence »; id., « impériale »; ed il Bonavia (¹) dà, per es., come forma eccezionale nel limone di Malta (*Malta lemon*), lo stilo persistente, tav. CLXXIX; e, alla tav. CCI, figura ancora due limoni *kagchi lemboo*, a stilo persistente.

Anche il Savastano (²) dà come carattere di varietà lo stilo persistente sino a maturità, e cita come esempio il *Citrus limonum Laurae* del Ferrari, che però a tav. 219 (loc. cit.) dà la figura del frutto senza stilo persistente.

Dello stesso avviso si mostra il Penzig (³) che così ne scrive: « lo stilo è per lo più diviso dall'ovario da un solco anulare, che anche qui segna un piano di articolazione, secondo il quale più tardi lo stilo, cadendo, si distacca; solamente in alcune varietà lo stilo è persistente, e, ingrossando, si corona l'apice del frutto maturo. »

« Poco tempo dopo l'impollinazione, gli stami ed i petali si staccano dal talamo e cadono: lo stilo resiste ancora un poco di più, poi cade anche esso. Soltanto in poche varietà, come già accennai, esso persiste anche fino al tempo della maturità del frutto ».

Il concetto generale si mostra quindi quello che la persistenza dello stilo, sul frutto degli agrumi, anche maturi, sia caratteristico di alcune varietà, per quanto non tutti i frutti della stessa pianta portino, e sempre, il carattere distintivo.

È naturale che un tale pensiero non facesse considerare il caso come un fenomeno teratologico, ritenendolo come caratteristico di determinate forme e, quindi, normale.

Il Savastano (⁴) parlando delle forme teratologiche dello stilo, così ne scrive:

« Per un certo tempo lo stilo si mostra grosso quanto l'ovario; le gemme fiorali con tali stili appariscono alquanto più ingrossate. In questi ovarî lo stilo perdura per un tempo maggiore, e, in talune varietà, sino a quasi

(¹) E. Bonavia, *Ure cultivated oranges and lemons etc. of India and Ceylon*. London, 1888.

(²) S. Savastano, *Le varietà degli agrumi nel napoletano*. Portici, 1883.

(³) O. Penzig, *Studii botanici sugli agrumi e sulle piante affini*. Roma, 1887.

(⁴) S. Savastano, *Le forme teratologiche del fiore e frutto degli agrumi*. Napoli, 1884.

maturità del frutto (fig. II); ma, non appena arriva questa, esso, già secco, cade. Il « pomo d'Adamo » (*C. vulg. pomum Adami*), il « limone di Laura » (*C. Lim. Laurae*), il « limone a peretta » (*C. Lim. Peyretta*) ed il « bergamotto » (*C. Bergamia*) presentano spessissimo tale caso ».

Il Penzig (loc. cit.) dà, come forma teratologica del gineceo, la persistenza dello stimma in fiori a stimma sessile, nel frutto:

« ... in alcuni fiori, ed anche costantemente in alcune varietà di agrumi, abortisce lo stilo, di modo che lo stimma viene ad essere sessile nell'apice dell'ovario. Con l'accerramento del frutto, poi, lo stimma ingrandisce corrispondentemente, e corona il frutto maturo, come una cicatrice più o meno grande, di forma varia, sovente lobata ».

Anche in pubblicazioni d'indole pratica (E. Arnau, *La coltivazione degli agrumi*; R. De Noter, *Les orangers* ecc.), la persistenza dello stilo è data come carattere distintivo di varietà.

* * *

Le mie ricerche sulla persistenza dello stilo sul frutto maturo degli agrumi, e quelle sulla morfologia del limone gaetano, che ho potuto seguire per lunghi anni, mi portano ad escludere le opinioni manifestate, sia che la persistenza debba ritenersi caratteristica di determinate varietà, sia che la si debba considerare di origine puramente teratologica, per costituzione diversa dalla normale dello stilo, in determinati fiori e determinate varietà.

Il fenomeno deve invece, a mio avviso, considerarsi dal lato biologico, per l'influenza che su di esso esercitano le condizioni esterne, verificandosi indistintamente in tutte le forme di agrumi coltivati, e normalmente nella fioritura invernale del limone gaetano, quando più specialmente certe condizioni al momento opportuno, vengano a verificarsi.

Può darsi che lo stilo persistente, per avverse condizioni (meccaniche, biologiche o patologiche), cada dopo l'ingrossamento, distaccandosi prima della maturazione completa del frutto; normalmente però esso continua ad ingrossarsi, resistendo sul frutto sino a completa maturità.

Quando nell'inverno, pel clima mite, si abbia una fioritura anticipata, a cui succeda un persistente abbassamento di temperatura che non permetta il normale svolgimento dei processi biologici seguenti l'impollinazione, si arresta la formazione dei tessuti di distacco tra lo stilo e l'ovario, tessuti che, una volta arrestati nel proprio sviluppo, sembra non possano più riformarsi, in maniera che lo stilo permane sul frutto come parte di esso, e, per quanto in minori proporzioni, partecipa al suo ingrossamento.

L'impollinazione negli agrumi, avvenga essa in forma autogama o in forma eterogama (questa ultima sembra la dominante), i granuli pollinici, trattenuti dalla materia mucillaginosa stimmatica sullo stimma, emettono quasi subito il tubo pollinico che dai canali conduttori dello stilo va all'ovario. Il tempo,

però, che il tubo pollinico impiega ad arrivare dallo stimma alla cavità ovariale, ha varianti grandissime, in dipendenza delle esterne condizioni biologiche, temperatura principalmente, per cui, da pochi giorni, può arrivare a più settimane.

Che vi sia un momento opportuno in cui, verificandosi l'abbassamento di temperatura, si abbia la persistenza dello stilo, non mi è stato possibile di assodare, e non lo credo; mentre ho ragione per ritenere che esso sia in diretta conseguenza del rallentato o arrestato sviluppo del tubo pollinico.

A tale considerazione sono giunto da osservazioni microscopiche fatte sullo stilo dopo l'impollinazione, e dall'andamento della temperatura, in rispondenza allo sviluppo del tubo pollinico ed all'accrescimento dei tessuti dello stilo.

In fatti, l'esame microscopico fatto sulla sezione dello stilo persistente in frutti più o meno maturi, mostra il parziale arresto nello sviluppo dei tubi pollinici, in maniera che sezioni trasversali fatte sulla base dello stilo, mostrano parte dei canali stilari vuoti, ciò che non si riscontra nelle sezioni più vicine allo stimma.

I frutti, tanto del limone quanto dell'arancio, di fioritura invernale, o sono sprovvisti o portano pochissimi semi, ciò che viene a confermare l'indagine microscopica.

Sembra che la cosa proceda nel modo seguente: se all'epoca della impollinazione si trovano condizioni biologiche che favoriscano il rapido accrescimento del tubo pollinico, in maniera da avere un breve decorso dalla impollinazione alla fecondazione, si ha la formazione dei tessuti di distacco, e lo stilo cade normalmente; se invece le condizioni biologiche non favoriscono tale relativo rapido accrescimento, non si ha la formazione dei tessuti di distacco, e lo stilo permane ingrossandosi sul frutto, con varianti talora notevoli.

In tale processo deve, forse, vedersi una azione vegetativa e morfogenica del polline, il cui modo di esplicarsi mi riprometto chiarire con ulteriori indagini.

Naturalmente, la persistenza dello stilo ha la sua intensità maggiore o minore secondo le annate, in quanto si verifichino le condizioni opportune alla impollinazione, prima, e lento o arrestato accrescimento del tubo pollinico, in seguito: il che si verifica sempre, o, più intensamente, quando ad una mite temperatura, che faccia anticipare la fioritura, succeda un lungo periodo di bassa temperatura. Questo, quanto meno, nel gaetano.

La morfologia del limone di Gaeta mi sembra venga a confermare la mia opinione sulla persistenza dello stilo sul frutto degli agrumi, in quanto è nella fioritura invernale che vengono a verificarsi le condizioni di lento accrescimento del tubo pollinico, mentre nella fioritura di maggio ed in quella di settembre, per le condizioni biologiche generali, e di temperatura principalmente, l'accrescimento del tubo pollinico è molto più rapido.

D'altra parte, se la persistenza dello stilo sul limone di Gaeta, fosse proprio un carattere distintivo di varietà, bisognerebbe spiegare per quale ignota causa le produzioni di maggio e settembre non portino stilo persistente, ed abbiamo ancora forma diversa, mentre le ricerche fatte parmi chiariscano il fatto. e il processo relativo alla persistenza dello stilo sul frutto degli agrumi.

Tutto ciò dimostra ancora quale via nuova sia da seguire nella determinazione delle varietà di limoni e agrumi coltivati, tenendo presente, oltre che le diverse condizioni biologiche, che tanto sensibilmente influiscono sulla costituzione del frutto, anche le diverse forme che assume secondo la fioritura da cui proviene.

Sarà ancora interessante di estendere le ricerche ai generi affini al genere *Citrus*, se anche in essi possono trovarsi frutti con stilo persistente; così come il Penzig (loc. cit.) descrive il frutto dell'*Aegle sepiaria* D. C. a stilo persistente, che presumibilmente trova anch'esso la sua causa nelle condizioni biologiche al momento della impollinazione.

Fisiologia. — Ricerche sulla scissione enzimatica dei polipeptidi per azione di estratti di tessuti e di organi animali (¹).
Nota I del dott. A. CLEMENTI, presentata dal Socio L. LUCIANI.

I.

Azione in vitro del fegato di uccelli, di vertebrati a sangue freddo e di invertebrati, sul dipeptide d-L-leucilglicina.

Lo studio dell'azione dei fermenti dei tessuti animali sui polipeptidi presenta un grandissimo interesse per il problema del ricambio delle sostanze proteiche nell'organismo animale. A E. Fischer (²) e E. Abderhalden e scolari dobbiamo la scoperta dell'esistenza di fermenti ad azione fondamentalmente analoga all'erepsina intestinale, che idrolizzano la molecola dei polipeptidi e la scindono negli aminoacidi da cui risulta costituita (³). Grazie alle ri-

(¹) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Fisiologica della R. Università di Roma.

(²) Fischer E. und Bergell, *Spaltung einiger dipeptide durch pankreas ferment.* Berichte der deutschen Chem. Gesellschaft. Jg. 37, s. 2103, 1904.

(³) Abderhalden und Teruuchi, *Das Verhalten einiger Polypeptide gegen Organextrakte.* Zeitschrift f. physiol. Chemie, Bd. 47, pag. 466, an. 1908. — Abderhalden und Hunter *Weiterer Beitrag zur Kenntniss der proteolitischen Ferment der tierischen Organe.* Zeitschrift f. phys. Chemie, Bd. 48, pag. 537, an. 1906. — Abderhalden und Teruuchi, *Studien über die proteolytische Wirkung der Pressäfte einiger tierischer Organe*

cerche di questi autori, le notizie che possediamo sui fermenti peptidolitici dell'organismo dei mammiferi sono sufficientemente estese; lo stesso non può dirsi per quanto riguarda i fermenti peptidolitici dei rimanenti vertebrati e invertebrati. Sull'erepsina sono state eseguite ricerche comparate da Vernon ⁽¹⁾, Falloise ⁽²⁾, Jacoby ⁽³⁾. Sui fermenti peptidolitici dei *vertebrati inferiori* non furono eseguite ricerche di sorta; sui fermenti peptidolitici degli invertebrati poi esistono solo due brevi lavori di Abderhalden ⁽⁴⁾ e di Abderhalden e Heise ⁽⁵⁾; questi due autori ricercarono la presenza dei fermenti peptolitici e peptidolitici negli invertebrati servendosi, nel maggiore numero di esperienze, di un metodo semplice, ma imperfetto: cioè sottoponendo *in vitro* all'azione dei tessuti il peptone di seta e considerando la deposizione di cristalli di tirosina come un segno positivo della attività esercitata dai fermenti sul peptone: solo in tre esperienze essi adoperarono, invece del peptone, il dipeptide gliciltirosina. Essi constatarono in tutti i casi la deposizione di cristalli di tirosina, e ne conclusero favorevolmente alla presenza di fermenti peptolitici negli invertebrati. Il metodo, come lo stesso Abderhalden (loc. cit.) nota, è molto imperfetto e solo qualitativo. Dello stesso metodo si servì Abderhalden per la ricerca dei fermenti peptidolitici nell'*Ascaris*.

Non solo dunque nulla ci è noto intorno alle modalità di azione dei fermenti peptidolitici dei vertebrati a sangue freddo e degli invertebrati, ma, anche sulla loro stessa esistenza, o le notizie che possediamo sono frammentarie e incomplete, o ci manca ogni notizia. A colmare tale lacuna mirano le ricerche qui iniziata, nelle quali mi proposi di studiare l'azione *in vitro* del fegato di vertebrati inferiori e di invertebrati sul dipeptide *d-l-leucilglicina*.

La *d-l-leucilglicina* fu sottoposta, in termostato a 37° in presenza di toluolo, all'azione dell'estratto acquoso del fegato di *Gallus domesticus*, di

sowie des Darmsaftes. Zeitschrift f. physiol. Chemie, Bd. 49, pag. 1, an. 1906. — Abderhalden und Rona, Das Verhalten von Leucil-phenylalanin, Leucyl-glycyl-glycin und von Alanyl-glycyl-glycin gegen Presssaft der Leber vom Rinde. Zeitschrift f. physiol. Chemie, Bd. 49, pag. 31, an. 1906. — Abderhalden und Oppler, Ueber das Verhalten einiger Polypeptide gegen Blutplasma und Blutserum von Pferde. Zeitschr. f. physiol. Chemie, Bd. 53, pag. 294, an. 1907.

(1) Vernon, *Erepsin in tissues*. Journal of physiology, 32, 1905.

(2) Falloise, *Contribu à la physiologie comparée de la digestion*. Archiv. intern. de physiologie, III, 282, an. 1906.

(3) Jacoby, *Ueber das Verhalten der Sperma und Eienzyme bei der Befruchtung und ersten Entwicklung*. Biochemische Zeitschrift, 26, an. 1910.

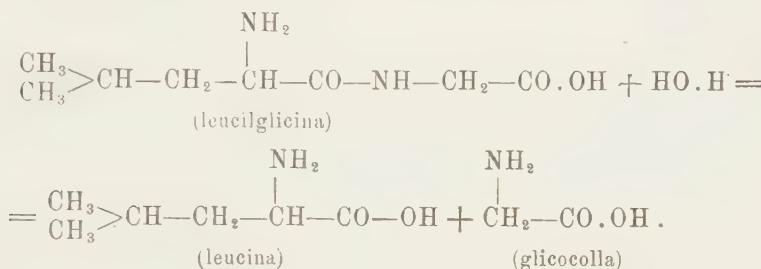
(4) Abderhalden, *Ueber den Gehalt von eingeweidewürmern an peptolitische Fermente*. Zeitschr. f. physiol. Chemie, 74, 409, an. 1911.

(5) Abderhalden und Heise, *Ueber das Vorkommen peptolitischen Fermente bei der Wierbellosen*. Zeitschr. f. physiol. Chemie, 62, 136, an. 1909.

Lacerta ocellata, di *Rana esculenta*, di *Gadus morrua* e di *Helix pomatia*.

Per riconoscere l'azione idrolitica degli estratti sul dipeptide, fu adoperato il metodo da me precedentemente descritto (1), consistente nella determinazione quantitativa dei gruppi aminici liberi, del dipeptide stesso prima e dopo l'azione dell'estratto; con questo metodo è possibile calcolare esattamente la quantità di dipeptide idrolizzata e la quantità di dipeptide rimasta integra.

Nel caso presente della *d*-*l*-lencilglicina, la idrolizzazione avviene secondo la seguente equazione:



I risultati ottenuti sono riportati nelle seguenti tabelle:

Azione dell'estratto acquoso di fegato di *Gallus domesticus*
sulla d-l-leucilglicina.

4 GIORNI A 40° IN THERMOSTATO	QUANTITÀ ADOPERATA DI NaOH 1/5 n IN CMC.
d-l-leucilglicina 1/40 n	cmc. 10
d-l-leucilglicina 1/40 n	" 10
Estratto acquoso di fegato	" 2
Acqua distillata	" 10
Estratto acquoso di fegato	" 2
<hr/>	
Come leucina + glicocolla	calcolato . . .
	{ trovato . . .
<hr/>	
d-l-leucilglicina	aggiunta . . .
	{ idrolizzata . . .

⁽¹⁾ Clementi A., *Contributo allo studio dei fermenti peptolitici sui polipeptidi*. Rend. Acc. Lincei, XXIV, ser. 5^a, 1^o sem. fasc. 9, an. 1915. — Id., *Microtitolazione alla formaldeide e sue applicazioni in fisiologia. - Nota II. Applicazione della microtitolazione della formaldeide allo studio dei fermenti peptolitici*. Rendiconti Accad. Lincei, XXIV, ser. 5^a, 2^o sem., fasc. 1^o, an. 1915.

*Azione dell'estratto acquoso di fegato di Rana esculenta
sulla d-l-leucilglicina.*

12 ORE A 40° IN THERMOSTATO		QUANTITÀ ADOPERATA DI NaOH 1/5 n IN CMC.
<i>d</i> - <i>l</i> -leucilglicina 1/40 n	cmc. 10	1,25
<i>d</i> - <i>l</i> -leucilglicina 1/40 n	" 10	1,75
Estratto acquoso di fegato	" 2	
Acqua distillata	" 10	0,10
Estratto acquoso di fegato	" 2	
Come leucina + glicocolla		
{ calcòlato . . .		2,50
{ trovato . . .		1,65
<i>dl</i> -leucilglicina		
{ aggiunta . . .		in mmgr. 47
{ idrolizzata . . .		in % 100 31
15		

*Azione dell'estratto acquoso di fegato di Lacerta ocellata
sulla d-l-leucilglicina.*

7 ORE A 37° IN THERMOSTATO			QUANTITÀ ADOPERATA DI NaOH 1/5 n IN CMC.	
<i>d-l</i> -leucilglicina 1/40 n	cmc.	5	0,625	
<i>d-l</i> -leucilglicina 1/40 n	"	5	1,200	
Estratto acquoso di fegato	"	2		
Acqua distillata	"	5	0,275	(N)
Estratto acquoso di fegato	"	2		
Come leucina + glicocolla			1,250	
			0,925	
<i>d-l</i> -leucilglicina			in mmgr.	in %
			23,50	100
			11,75	50

N. B. In questa e nelle due esperienze precedenti, i campioni di estratti a cui fu aggiunto il dipeptide, dopo la permanenza in termostato, erano limpidi trasparenti presentavano numerosi *coaguli e flocchi*, i campioni di controllo erano uniformemente torbidi, e non contenevano né *coaguli* né *flocchi*.

*Azione dell'estratto acquoso di fegato di Gadus morrua
sulla d-l-leucilglicina.*

4 GIORNI IN TERMOSTATO A 37°		QUANTITÀ ADOPERATA DI NaOH 1/5 n IN CMC.
d-l-leucilglicina 1/40 n	cmc. 5	0,625
d-l-leucilglicina 1/40 n	" 5	1,025
Estratto acquoso di fegato	"	
Acqua distillata	" 5	0,100
Estratto acquoso di fegato	"	
Come leucina + glicocolla		2,250
{ calcolato . . .		0,925
{ trovato . . .		
d-l-leucilglicina		in mmgr. in %
{ aggiunta . . .		23,5 100
{ idrolizzata . . .		11,75 50

*Azione dell'estratto acquoso di fegato di Helix pomatia
sulla d-l-leucilglicina.*

48 ORE IN TERMOSTATO A 35°		QUANTITÀ ADOPERATA DI NaOH 1/5 n IN CMC.
d-l-leucilglicina 1/40 n	cmc. 10	1,25
d-l-leucilglicina 1/40 n	" 10	2,00
Estratto acquoso di fegato	" 1	
Acqua distillata	" 10	0,20
Estratto acquoso di fegato	" 1	
Come leucina + glicocolla		2,50
{ calcolato . . .		1,80
{ trovato . . .		
d-l-leucilglicina		in mmgr. in %
{ aggiunta . . .		47 100
{ idrolizzata . . .		20 42

I fatti nuovi dimostrati dai risultati delle presenti esperienze, sono i seguenti:

1°) nel fegato di uccelli, di rettili, di anfibi, di pesci e di invertebrati (molluschi), sono presenti fermenti capaci di idrolizzare il dipeptide *d-l-leucilglicina*;

2°) l'idrolizzazione del dipeptide *d-l-leucilglicina* per opera di tali fermenti avviene secondo il principio dell'azione asimmetrica dei fermenti peptidolitici sui polipeptidi racemici, principio scoperto da E. Fischer, e da me dimostrato quantitativamente pel caso dei fermenti peptidolitici dei mammiferi (loc. cit.).

Biologia. — Osservazioni biologiche sulla Recurvaria nanella Hb., microlepidottero dannoso agli alberi fruttiferi ⁽¹⁾. Nota preliminare di ARMANDO MIGNONE, presentata dal Socio BATTISTA GRASSI.

Nella prima quindicina del marzo 1915, negli orti e giardini di Roma, vennero notate delle piccole larve di colore bruno-rossiccio, le quali danneggiavano i fiori del pesco [*Prunus persica* (L.) Stok.].

Si riconobbero subito come larve di un microlepidottero il quale venne più tardi identificato ⁽²⁾ per la specie *Recurvaria nanella* Hb. 1876. [Gen. *Recurvaria* (Hw.) HS.; Sottofam. *Gelechiinae*; Fam. *Gelechiidae* ⁽³⁾].

Di essa troviamo notizie, successivamente dal 1826 in poi, nelle pubblicazioni di parecchi autori stranieri, e la semplice indicazione in qualcuna di autore nostro; ma le descrizioni sono tutte generiche e molto incomplete ⁽⁴⁾.

Specialmente per quanto concerne la larva e la crisalide, le notizie si riducono a semplici cenni sommarii dei caratteri macroscopici; e, quanto ai danni di cui questo microlepidottero è capace, ai suoi costumi, al suo ciclo di vita, le incertezze sono ancora molte, per le discordanze nelle relazioni dei vari autori e per fatto che quelli i quali se ne occuparono in data più recente, non tennero alcun conto dei lavori precedenti.

A prescindere da questo, ci è sembrato di somma importanza pratica lo stabilire, oltre che i caratteri morfologici, anche i costumi e il ciclo biologico.

⁽¹⁾ Il lavoro fu eseguito nell'Istituto di anatomia comparata della R. Università di Roma; mi ha indirizzato nelle ricerche la dottoressa Anna Foà, alla quale porgo vivi ringraziamenti.

⁽²⁾ Gli esemplari vennero determinati da E. Turati (9 agosto 1915) e, successivamente, da J. De Joannis (21 agosto 1915); ad entrambi esprimo sentiti ringraziamenti.

⁽³⁾ Spuler A., *Die Schmetterlinge Europas*, 1910, II. Band, pag. 356.

⁽⁴⁾ La bibliografia verrà riportata interamente nel lavoro in esteso.

gico dell'insetto nelle condizioni di ambiente che si riscontrano da noi (diversissime da quelle dell'Europa centrale e settentrionale, dove hanno fatto le loro osservazioni tutti gli autori che se ne sono occupati anteriormente), tanto più che trattasi di specie meritevole di grande attenzione, se può, secondo Houghton⁽¹⁾, nelle annate di forte invasione, distruggere completamente il raccolto dei frutteti.

Con una serie di ricerche metodiche, iniziate sin dal marzo 1915 ed eseguite contemporaneamente in laboratorio ed in piena aria, siamo riusciti a stabilire e a descrivere i caratteri morfologici di questa specie di Hübner allo stato larvale, ninfale e adulto, nonché a precisare il ciclo biologico di essa e i suoi costumi.

Con altre ricerche già preordinate ci proponiamo di precisare:

1°) in che consistano esattamente i danni che la *Recurvaria nanella* Hb. produce, e quali siano le piante coltivate o spontanee che essa attacca, oltre quelle già prese in considerazione;

2°) la distribuzione geografica di tale specie in Italia;

3°) le cause biologiche che ostacolano lo sviluppo dell'insetto e i mezzi più efficaci per combatterlo.

Riserbandoci di pubblicare *in extenso* la descrizione, che non può riussire chiara senza il sussidio delle figure, vogliamo indicare, in questa prima Nota, qual'è il ciclo biologico della *Recurvaria nanella* Hb. e quali i suoi costumi.

Biografia dell'adulto. — Le farfalle, molto piccole, cominciano a comparire nella seconda metà di giugno, e si trovano in maggior numero nella prima quindicina di luglio. Verso la fine di questo mese e ai primi di agosto, è molto difficile di rintracciarne.

Durante il giorno, stanno riparate, ad ali chiuse, quasi immobili, nelle anfrattuosità della corteccia, sui tronchi e sui rami più grossi; noi le abbiamo trovate specialmente sulle piante di pesco [*Prunus persica* (L.) Stok.] e di albicocco (*Pr. armeniaca* L.). Qualche esemplare si è pure trovato sul susino (*Pr. domestica* L.), sul melo (*Pyrus malus* L.), e uno solo sul mandorlo (*Pr. amygdalus* Stok.).

Le farfalle si muovono soltanto quando sono toccate; ma, invece di volare, corrono rapidamente lungo le fessure e le screpolature della corteccia. Tutto al più, fanno voli brevi per sottrarsi alla cattura, disponendosi subito dopo nella posizione di riposo.

Data la piccolezza e il mimetismo di queste farfalle con la corteccia dei peschi e degli albicocchi, non è facile di rinvenirle, e spesso accade di perderne le tracce dopo essere riusciti a discernerle.

(¹) Houghton J. T., *The Entomologist's Monthly Magazine*, Second Series, vol. XIV (vol. XXXIX) 1903, pp. 219 e 220.

Sulle foglie e sui rami giovani non abbiamo mai trovato adulti.

La copula e la deposizione delle uova, fino ad ora, non sono state da noi osservate né in campagna né nelle gabbiette.

In un ovario, osservato il 22 luglio, abbiamo però constatato la presenza di molte uova, parecchie delle quali ci sembravano mature; così che è da ritenere che ogni farfalla deponga un numero considerevole di uova estremamente piccole.

Le nostre osservazioni, fatte nelle gabbiette, ci portano ad escludere che gli adulti si nutrano: perciò è da presumere che essi muoiano dopo l'accoppiamento.

Biografia della larva. — Abbiamo visto comparire le giovani larve sul finire dell'agosto (giorno 27). Erano piccolissime (mm. 1-1,5 di lunghezza; mm. 0,3-0,4 di larghezza) e di colorito brunastro tendente al rossoiccio. Riteniamo che sia possibile di rinvenirle già verso la metà di agosto.

Quali nutrici della specie possiamo indicare quasi tutte le piante frutifere coltivate della famiglia delle *Rosacee*, appartenenti alle sotto-famiglie delle *Prunee* e delle *Pomee*.

Negli orti e giardini di Roma la larva vive a spese delle foglie, principalmente del pesco [*Prunus persica* (L.) Stok.] e dell'albicocco (*Pr. armeniaca* L.). In grado minore, e in ordine di decrescente intensità, abbiamo visto che attacca il ciliegio (*Pr. avium* L.), l'amarena o marasca (*Pr. cerasus* L.), il melo (*Pyrus malus* L.), il cotoño (*Cydonia vulgaris* Ins.), e solo una volta constatammo le caratteristiche lesioni su una foglia di pero (*Pyrus communis* L.). Trovammo sempre immuni le foglie del mandorlo (*Pr. amygdalus* Stok.) e del biancospino (*Crataegus oxyacantha*).

Le giovani larve penetrano nella foglia (entro lo spessore della lamina), praticando un minutissimo foro circolare nella sua pagina inferiore, preferibilmente in prossimità di qualche nervatura o negli angoli da esse formati. Penetrate nelle foglie, le larve si scavano delle brevi e sottili gallerie, a fondo cieco, le quali, generalmente, cominciano con un corto tratto rettilineo e poi diventano tortuose e si ramificano. Anche le ramificazioni terminano tutte a fondo cieco. Le gallerie sono visibili tanto dalla pagina superiore quanto dalla pagina inferiore, e spiccano evidentissime, come linee bianche, sul fondo verde della foglia. Appaiono anche meglio a chi guarda le foglie contro luce.

La direzione delle gallerie non è costante, così come non è costante la loro forma. Si può dire che esse attraversano la foglia in tutti i sensi; nella maggior parte dei casi seguono però l'andamento delle nervature più grosse; le sottili possono essere intersecate.

I brucolini si nutrono del parenchima verde delle foglie, lasciando intatte le epidermidi; determinano invece l'appassimento delle nervature nei tratti attraversati dalle gallerie.

Difficilmente si trovano deiezioni dentro le gallerie; le larvettine provvedono a tenerle sempre pulite, accumulando tali rifiuti intorno al forellino d'entrata.

Le dimensioni delle gallerie non superano determinati limiti; più frequentemente la lunghezza del ramo principale varia da 10 a 16 mm. e può arrivare sino a 20 mm. Per le misure consideriamo come ramo principale quello che risulta più lungo, partendo dal foro di penetrazione e arrivando a uno dei fondi ciechi.

Continuando la larva a nutrirsi, si nota la formazione di diverticoli, i quali, come la branca principale, terminano a fondo cieco, talvolta leggermente espanso.

La larghezza delle gallerie varia da mm. 0,2 a mm. 0,6-0,7; essa è pressoché uguale per tutta la loro lunghezza e si conserva la stessa tanto nella branca principale quanto in quelle secondarie. Riesce quindi difficile distinguere quale sia la prima e quali le seconde.

In ogni galleria non vi è che una larva; nella stessa foglia le gallerie possono essere parecchie. Dentro di esse, le giovani larve si muovono molto rapidamente e sono vivacissime. Molestandole, escono dall'orifizio di penetrazione e non ritornano più nella galleria abbandonata. Se cadono, emettono un filo per attaccarsi.

Il fatto che le dimensioni delle gallerie non aumentano oltre determinati limiti mantenendosi sempre più strette delle larve completamente sviluppate, dimostra che esse albergano soltanto larve giovani; invero abbiamo potuto constatare che le larve, a cominciare dagli ultimi giorni di agosto o primi di settembre, e successivamente sino a quasi tutto ottobre, le abbandonano.

Col progredire della stagione, secondo l'influenza che l'andamento di essa esercita sull'attività vegetativa della pianta, diminuisce gradatamente la percentuale delle gallerie con larve, in confronto di quelle abbandonate.

In complesso, le dimensioni delle larve minatrici vanno aumentando sensibilmente dall'agosto all'ottobre; però nell'agosto è possibile di trovare larve già molto sviluppate, mentre a fine ottobre ve ne sono di quelle ancora di dimensioni minime.

Le larve che abbandonano le gallerie discendono dalle foglie ai rami e ai tronchi cercando rifugio fra le screpolature più profonde e meglio riparate della corteccia e di sotto gli strati lichenosi di essa. Una volta trovato, si tessono un bozzolo minutissimo di seta bianca, discretamente resistente, di forma oblunga, le cui dimensioni variano, per la lunghezza, da mm. 1,5 a 2, e, per la larghezza, da mm. 0,5 a 1. In questi bozzoletti le larve passano l'autunno e l'inverno (ibernamento).

Oltre che per la loro piccolezza e per la loro posizione, i bozzoletti sono resi pressoché invisibili da un rivestimento costituito di detriti minu-

tissimi della scorza stessa e da granellini di terra o di arena, tenuti insieme, probabilmente, da bava sericea; così che, per identificarli, occorrono buona pratica e il sussidio di una lente.

Per quanto gli autori dicano che le larve vanno a svernare alcune nei crepacci dei muri, altre nelle strisce di stoffa che si usano per fissare le piante ai sostegni, altre ancora nell'ascella delle gemme ⁽¹⁾, a noi, nonostante le più accurate e persistenti ricerche, non fu dato di trovare i bozzeletti invernali in altri ripari all'infuori della corteccia. Anche le indagini, fatte nel terreno intorno al piede degli alberi infestati e sotto la loro chioma, diedero risultato negativo.

Le giovani larve escono dai ricoveri, che si sono fabbricati per l'inverno, nel tempo in cui s'inizia la fioritura delle piante ospiti. Abbiamo visto le prime larve ibernanti libere, soltanto nella prima quindicina di marzo; ma riteniamo che esse compaiano con notevole anticipazione, perchè le larve catturate in marzo presentavano già dimensioni più grandi di quelle massime constatate per le larve imbozzolate.

Per cercare nutrimento, le larve salgono sino alle gemme fiorali, nelle quali praticano un foro tondeggianto o leggermente ovale, un po' al di sopra del punto d'attacco con il peduncolo. Questo, in alcune *Prunee* (pesco, albicocco), come si sa, è cortissimo, cosicchè il foro viene a trovarsi poco più in su della inserzione delle gemme fiorali al ramoscello. Nel pesco e nell'albicocco, che portano fiori solitari od a coppie per tutta la lunghezza dei rami fruttiferi, il foro viene praticato dalla parte dell'ascella. Nel ciliegio, che porta i fiori ad ombrello o a grappoli lungamente peduncolati, nel melo, in cui i fiori sono pure disposti ad ombrello ed hanno peduncoli abbastanza sviluppati, e nel pero, in cui i fiori formano corimbi semplici e sono pure ben peduncolati, il foro viene praticato dalla parte in cui i fiori vengono a contatto fra loro, non mai dalla parte libera.

Il foro, passando attraverso le appendici di protezione della gemma, arriva sino al mezzo di essa, cioè sino al gineceo, precisamente dove il pistillo si attacca all'asse ricettacolare. Praticato il foro, la larva emette dei fili di seta tra fiore e ramoscello (nel pesco e nell'albicocco), tra fiore e fiore (nel ciliegio, nel melo e nel pero), legando, nel primo caso, il fiore al ramoscello, e, nel secondo, fiore con fiore. In questo modo la larva ostruisce l'orifizio e rimane chiusa nella gemma.

Esaminando dei *rami a frutto* di pesco o di albicocco, si vede subito quali sono le gemme fiorali attaccate dalla larva, perchè, mentre quelle immuni conservano la loro posizione normale divergente, formando cioè con il ramoscello un'ascella ad angolo più o meno acuto, quelle intatte sono strettamente aderenti al ramoscello stesso. Fra la gemma infetta e il ramo-

(1) Houghton J. T., op. citata.

scello sono visibili i fili setacei e i detriti minutissimi (che hanno l'apparenza di segatura di legno finissima) risultanti dall'erosione fatta dalla larva. Quanto ai fiori infetti di ciliegio, melo e pero, si distinguono subito perchè, invece di essere sciolti, sono uniti, come cuciti, e abbastanza saldamente. insieme coi fiori sani circostanti.

I fiori infetti albergano una sola larva; anche i fiori caduti al suolo sono spesso abitati dal bruco, ma la maggior parte ne è priva.

Quali e di che entità siano i danni che, dopo l'ibernamento, le larve recano alle gemme fiorali, diremo in una prossima Nota, trattandosi di questione fondamentale che richiede esame particolareggiato.

Oltre i fiori, le larve attaccano anche le gemme fogliifere e i teneri germogli non ancora interamente aperti. In questi la larva penetra praticando un foro tondeggiante che si prolunga in direzione quasi orizzontale sino nel mezzo dei germogli. Non possiamo però escludere che le larve vi penetrino dalla sommità.

Entrate nei germogli, esse, mediante bave seriche, avvolgono le giovani foglie facendole aderire fortemente le une alle altre, e così ne impediscono il regolare accrescimento e lo sviluppo. Spesso anche le foglie esterne già divaricate, vengono legate con quelle costituenti il boccio. Così i germogli si deformano, e la deformazione diventa più marcata in contrasto con la progressiva tendenza delle foglie a svolgersi. Esse infatti si piegano nei modi più svariati, s'incurvano, si contorcono, e i germogli perdono il loro aspetto affusolato per prendere quello di grovigli o di involti informi. Per la loro grossezza, che talvolta raggiunge quella di una noce, questi grovigli sono molto bene visibili anche a distanza. Talora ad essi vengono aggiunte foglie di getti vicini, le quali appaiono come cucite al viluppo principale. Spesso i grovigli, invece che con le foglie apicali dei getti, vengono formati con foglie situate più in basso. Alcune volte le larve formano il loro nicchio con due sole foglie riunite comunque assieme, e, abbastanza frequentemente, le larve si accontentano di arrotolare l'orlo di una sola foglia dalla parte della pagina superiore.

Oltre alle deformazioni delle quali abbiamo parlato, le foglie vengono brucate dalla larva più o meno estesamente: così che, svolgendole, esse appaiono traforate od erose irregolarmente nei più svariati punti della lamina. Non sono rispettate nemmeno le nervature.

I bruchi rimangono sulle parti verdi delle piante sino verso la fine di aprile; dopo, migrano sulle parti legnose cercando di nascondersi nella corteccia, dove essa presenta maggiori fenditure e screpolature, come, per es., sui fusti e nelle biforcazioni delle grosse branche o dei grossi rami. Trovato un posto adatto, cominciano ad emettere una serie di fili sericei che attaccano alle asperità della corteccia; e poi costruiscono un vero e proprio bozzetto candido nel quale si chiudono e passano allo stadio di crisalide.

Quando sono pronte per la metamorfosi le larve hanno raggiunto le dimensioni massime, e cioè mm. 8-10 di lunghezza e mm. 1-1,2 di larghezza.

Non parliamo in questa prima Nota, delle frequenti variazioni di colore cui vanno soggette le larve, perchè è argomento che richiede speciale trattazione.

Luoghi preferiti dalle larve per passare allo stadio di crisalide, sono quei piccoli riccioli avvoltolati a spirale, che si formano in talune piante a decorticazione anulare, come, per es., nel ciliegio, dove avviene tipicamente sempre, nel pesco, nel pero e nel melo quando sono di giovane età. Distendendo i riccioli, tali bozzoletti appaiono, benchè piccoli, evidentissimi per la loro candidezza, e perfettamente conformati.

Biografia della crisalide. — La crisalide è abbastanza saldamente attaccata all'involucro sericeo per mezzo di setole, portate dall'ultimo segmento addominale, piegate a uncino all'estremo. Il suo colorito è giallo d'oca, qualche volta paglierino; quando si avvicina il tempo della schiusura, esso diventa molto scuro.

Le piante recettrici delle crisalidi sono le stesse nelle quali trovammo le larve dopo l'ibernamento: e cioè il pesco, l'albicocco, il ciliegio, il melo, il pero. Non ne trovammo alcuna sul mandorlo.

Contrariamente alle osservazioni di Houghton (¹), non constatammo mai la presenza di crisalidi nelle parti verdi delle piante danneggiate dalla larva; nemmeno nei pezzi di stoffa e negli stracci posti fra le grosse branche dei tronchi o legate ai tronchi stessi.

Circa la durata dell'evoluzione dell'insetto, possiamo dire che essa va accelerandosi dalla primavera all'estate man mano che la stagione progredisce e si fa calda: difatti, mentre per le larve catturate in marzo e in aprile sono occorsi, per la loro metamorfosi, da 46 a 52 giorni, per quelle catturate in maggio sono bastati da 27 a 44 giorni; per quelle catturate in giugno, da 15 a 25 giorni; e per due, catturate il 1º luglio, soli 21 giorni. L'unica larva potuta catturare il 3 luglio morì senza faro il bozzolo.

Concludiamo affermando che la specie *Recurvaria nanella* Hb. presenta una sola generazione all'anno e che, a Roma, il suo ciclo si svolge interamente sulle piante ospiti indicate.

Aggiunta. — Dopo che avevo fatto la prima correzione delle bozze di stampa di questa mia Nota, sono pervenuti al prof. B. Grassi i Bollettini del U. S. Department of Agriculture, Bureau of Entomology, usciti dall'agosto 1914 ad oggi.

Tra questi trovo il n. 113, portante la data del 22 agosto 1914, nel quale si legge una breve Memoria dei signori E. W. Scott e J. H. Paine, sullo stesso argomento da me trattato. Evidentemente si deve alle condizioni eccezionali create dalla guerra, l'enorme ritardo dell'arrivo, al nostro laboratorio, di queste pubblicazioni, che pervenivano regolarmente. È quindi

(1) Houghton J. T., op. citata.

superfluo dire che le mie ricerche sono state del tutto indipendenti da quelle degli autori su citati.

Sono tuttavia lieto che le conclusioni alle quali siamo pervenuti concordino nei punti essenziali; così, con questa reciproca conferma, il ciclo biologico della *Recurvaria nanella* Hb. resta definitivamente stabilito.

È notevole il fatto che il detto ciclo sia, nelle linee generali, uguale in America e in Europa, cosa che non si sarebbe potuta stabilire senza fare ricerche anche da noi; infatti il comportamento avrebbe potuto essere diverso nei due continenti, come per es., accade per la fillossera della vite.

Nel mio lavoro in esteso, già pronto per le stampe, si troverà anche la parte zoologica che è molto deficiente nel lavoro degli autori americani, e si metteranno in luce le differenze nella parte biologica.

Patologia. — *Ulteriori ricerche sulla possibile trasmissione delle tripanosomiasi animali nell'uomo: le reazioni biologiche nelle tripanosomiasi umane ed animali nella identificazione dei virus.* Nota I del prof. dott. ALESSANDRO LANFRANCHI⁽¹⁾, presentata dal Socio B. GRASSI.

In una precedente pubblicazione⁽²⁾, dopo di avere riportato succintamente quanto era stato fatto per la identificazione del *virus* agente dell'infezione da me accidentalmente contratta in laboratorio, rendevo noti i risultati ottenuti ricercando il comportamento dei diversi *virus* tripanosomiaci di fronte al mio siero, in rapporto ai poteri agglutinante, tripanolitico, protettore. Saggiai inoltre il potere di reazione fra le precipitine e le sensibilizzatrici del mio siero di fronte ai gruppi funzionali corrispondenti precipitogeni e sensibilisogeni di siero di animali infetti da tali *virus*.

In base ai risultati delle ricerche allora compiute, concludevo: il *virus Lanfranchii* sarebbe da riportare (per non usare il termine identificare):

per il potere tripanolitico, più al *gambiense* che non all'*Evansi*;

per il potere protettore, e più ancora per l'agglutinabilità, precipitazione e fissazione del complemento, al *virus* della surra.

Le ricerche, di cui sopra, ebbero luogo nei primi mesi del 1914, quando mi trovavo sottoposto alla cura atoxylica, eseguita ininterrottamente fin dalla seconda metà del maggio del 1912; ed avvertivo: « non so fino a qual punto la cura atoxylica potrà avere influito nei diversi ordini di ricerche... ».

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di patologia e clinica medica veterinaria nella R. Università di Bologna.

⁽²⁾ Al. Lanfranchi, *Su la possibile trasmissione delle tripanosomiasi animali nell'uomo*. « Bull. delle scienze mediche », Bologna, an. LXXXVI, serie IX, vol. 3°, 1915.

Con il 10 luglio 1914 cessava le iniezioni di atoxyl; sul finire dello stesso anno, si manifestava una ricaduta con la ricomparsa dei tripanosomi in circolo.

Pensai allora che sarebbe stato di grande interesse compiere ulteriori ricerche col mio siero, prima di sottomettermi di nuovo ad un trattamento, e poter così rilevare quali modificazioni avrebbe presentate, anche in seguito al fatto che nessuna cura era stata eseguita da diversi mesi.

* * *

In un primo tempo ho ricercato il potere agglutinante del mio siero.

Ho creduto però bene, dati i risultati ottenuti nelle comunicate ricerche, di non prendere più in esame, in questa come nelle ricerche successive, i *virus* *nagana* e *rodesiense*, limitandomi quindi ad esperimentare con i *virus* *Lanfranchii*, *gambiense* ed *Evansi*, rappresentati dagli stessi ceppi anteriormente adoperati, e mantenuti in laboratorio mediante passaggi su cavie.

Tutte le cautele furono prese per allontanare qualsiasi causa di errore (1).

POTERE AGGLUTINANTE.

Prima serie. Il siero fresco veniva messo a contatto con sangue di ratti in piena infezione, contenente quindi numerosi tripanosomi.

Nell'apprezzamento dei risultati ho tenuto solo conto di quelle proporzioni nelle quali il siero dava rapida agglutinazione e questa persisteva sino alla immobilità e conseguente tripanolisi.

Il fenomeno di agglutinazione in rapporto ai tre *virus* adoperati, è stato da me osservato nettamente nelle seguenti proporzioni:

1 : 120,000	per il <i>virus</i> <i>Lanfranchii</i>
1 : 120,000	" " <i>gambiense</i>
1 : 100,000	" " <i>Evansi</i> .

Seconda serie. Il siero inattivato veniva messo a contatto sempre col sangue di ratti in piena infezione.

I risultati di questa serie si differenziano notevolmente da quelli otte-

(1) Per la ricerca del potere agglutinante, ho tralasciato il controllo, poichè fino dalle prime ricerche in merito, di Laveran e Mesnil, a quelle ultime di Heckenroth e M. Blanchard e mie, si è costantemente notato come il siero di sangue umano sia privo di coaguline atte a dar luogo all'agglutinazione dei tripanosomi.

nuti con l'uso del siero fresco, sopra riportati. Infatti l'agglutinazione fu nettamente osservata nelle proporzioni di

1 : 50,000 per il *virus Lanfranchii*
1 : 5,000 " *gambiense*
1 : 50,000 " *Evansi.*

* * *

Un primo dato si rileva da queste nuove ricerche, il potere agglutinante del siero, sia fresco, sia inattivato, è aumentato. Ciò sta forse in rapporto alla mancanza di cure per un non breve periodo di tempo? Può darsi che si ripeta anche per l'agglutinazione quanto F. Heckenroth e M. Blanchard hanno visto per il potere protettore, che per il fatto della cura sembra subire una diminuzione?

Può darsi, evidentemente, che l'infezione, prendendo un decorso cronico, finisce per indurre l'organismo a vieppiù difendersi contro l'infezione stessa, con la produzione di nuovi anticorpi: ma, secondo me, è più supponibile la ipotesi che, sottraendo i parassiti all'azione di una sostanza parassitotropica, tripanocida (nel caso speciale l'atoxyl), questi abbiano naturalmente riattivato la loro facoltà antigena, inducendo conseguentemente speciali reazioni di difesa dai gruppi cellulari incaricati della produzione di anticorpi antagonisti alla causa antigena che funzionava quale stimolo speciale.

Detto aumento del potere agglutinante non si è verificato però proporzionalmente in rapporto ai tre *virus* presi in esame.

Ricordo come nelle ricerche precedenti i risultati furono, col siero fresco per il *virus Lanfranchii*, 1 : 100,000; *gambiense*, 1 : 80,000; *Evansi*, 1 : 80,000. Con l'inattivato, invece, *Lanfranchii* ed *Evansi*, 1 : 40,000; *gambiense*, 1 : 100.

Risulta quindi, per il siero fresco, che detto potere — qualora si prenda come media dell'aumento quella dell'*Evansi* — è proporzionalmente diminuito in rapporto al *virus Lanfranchii*, ed aumentato per il *gambiense*.

Con il siero inattivato, si è avuto un aumento notevole del potere agglutinante rispetto al *virus gambiense*, in confronto a quello constatato nelle prime ricerche.

Come possono interpretarsi i risultati ottenuti? Vengono forse in appoggio, come a tutta prima può sembrare, alla ipotesi che il *virus*, col quale mi sono infettato, sia da identificarsi con il *gambiense*?

Non credo si debba ciò ammettere.

Il proporzionalmente diminuito potere agglutinante del siero fresco, di fronte al *virus Lanfranchii*, può stare anzi ad indicare che detto *virus*, con

il passaggio avvenuto per oltre un anno negli animali, va riacquistando i caratteri che possedeva prima di infettare il corpo umano.

D'altro lato, il fatto del potere agglutinante del siero fresco ed inattivato per il *trip. gambiense* sarebbe la riprova di quanto ho detto sopra.

Il *virus*, del quale ancora sono infetto, è andato vieppiù prendendo i caratteri di un *virus* umano: in altre parole, è andato maggiormente umanizzandosi. E si comprende anche come i nuovi anticorpi (nel caso presente, le agglutinine), a cui ha dato origine, abbiano subito delle corrispondenti modificazioni.

I risultati, ottenuti da Levaditi e Muttermilch (¹) con le loro geniali ricerche, sono la più bella dimostrazione in appoggio.

Ciò detto, però, resta il fatto incontrovertibile che la specificità della causa nella infezione meglio non potrebbe essere rappresentata se non dall'alto ed uguale potere agglutinante di fronte ai *virus Lanfranchii* ed *Evansi*.

Già accenai, nelle prime ricerche, come i risultati ottenuti con il siero inattivato indicassero come le agglutinine contenute nel mio siero fossero delle vere e proprie agglutinine specifiche, in tutto rispondenti a quelle dei sieri antibatterici e dei sieri preparati con cellule libere, e come quindi dette reazioni di agglutinazione derivino indiscutibilmente da una capacità agglutinativa, da una vera e propria funzione agglutinogena, indissociabile nei parassiti esaminati e facilmente dimostrabile dalle corrispondenti agglutinine contenute nel mio siero.

* * *

I risultati di queste ricerche vengono, a mio modo di vedere, a confermare la già enunciata conclusione.

Dirò di più: costituiscono anzi una prova delle più dimostrative, appunto per quei risultati che a prima giunta, come ho fatto notare, sembrano controversi.

Nessun'altra spiegazione io credo ad essi possa darsi. all'infuori di quella da me proposta.

Devo quindi ammettere che, per il potere agglutinante, il *virus Lanfranchii* è da riportarsi a quello della *surrà*.

(¹) Levaditi e Muttermilch, *Anticorps et espèces animales*. Ann. Inst. Pasteur, 1913, pag. 926.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

G. PAOLI. — *Risultati botanici della Missione scientifica Stefanini-Paoli nella Somalia italiana meridionale.* Pres. dal Corrisp. BACCARINI.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Corrisp. CASTELNUOVO, relatore, a nome anche del Corrisp. REINA, legge una Relazione colla quale si propone la inserzione nei volumi delle Memorie, del lavoro del dott. F. CANTELLI intitolata: *Sulla legge dei grandi numeri.*

Le conclusioni della Commissione esaminatrice, poste ai voti dal Presidente, sono approvate dalla Classe, salvo le consuete riserve.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente BLASERNA dà il triste annuncio della morte del Socio straniero Sir HENRY ROSCOE, avvenuta il 18 dicembre 1915; apparteneva il defunto all'Accademia, per la *Chimica*, sino dal 26 agosto 1907.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario MILLOSEVICH presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Corrispondenti PASCAL: *I miei integrapi per equazioni differenziali*, e PEANO: *L'esecuzione tipografica delle formule matematiche*; e un volume pubblicato sotto la direzione del Contr' Ammiraglio M. GIAVOTTO, dal titolo: *Tavole nautiche raccolte e pubblicate per cura dell'Istituto Idrografico della Regia Marina.*

Il Socio PATERNÒ presenta il primo volume di una grande pubblicazione intrapresa dal dott. ALDO MIELI, destinata a contenere una storia generale del pensiero scientifico dalle origini a tutto il secolo XVIII. Il primo volume ha per titolo: *Le scuole Jonica, Pythagorica ed Eleatica*

(*I Prearistotelici I.*); e del contenuto del volume e degl'intendimenti dell'autore il senatore Paternò informa la Classe colle seguenti parole:

« Ho l'onore di presentare all'Accademia il primo volume di un'opera del dott. Aldo Mieli, libero docente nella Università di Roma. Il dott. Aldo Mieli ha concepito il piano ardito e forse più che ardito audace, della compilazione della storia generale del pensiero scientifico dalle origini a tutto il secolo XVIII, e presenta un primo saggio della sua vasta opera in una monografia: « *Sui prearistotelici* », nella quale tratta delle scuole ionica, pitagorica ed eleata.

« Il dott. Mieli non è nuovo alle ricerche sulla storia delle scienze, e possiede vasta cultura e studi severi, onde molto si può sperare dalla sua attività. Certamente il programma che egli si propone di svolgere e che è frutto di lunga meditazione, è arduo ed ha bisogno molto tempo; ma se egli riuscirà, come è da augurarsi, nell'intento renderà alla scienza, e particolarmente all'Italia, un servizio grandissimo, e tanto maggiore in quanto che il vertiginoso progresso scientifico degli ultimi tempi, fa spesso dimenticare le relazioni nello sviluppo delle diverse scienze e tende a trasformare gli uomini di studio in tecnici di una troppo ristretta parte dello scibile, a scapito dell'alto pensiero ispiratore e dominatore di ogni forma di sapere ».

Il Socio VOLTERRA offre una copia dei *Rendiconti delle sedute dell'anno accademico 1914-1915. del Seminario matematico della Facoltà di scienze della R. Università di Roma*; e parla di questa pubblicazione, citando e riassumendo alcuni tra i lavori che nel volume sono contenuti.

CONCORSI A PREMI

Il Segretario MILLOSEVICH comunica alla Classe i seguenti elenchi dei concorrenti ai vari premi scaduti col 31 dicembre 1915:

Elenco dei concorrenti al premio Reale per le *Scienze biologiche*.

(Scadenza 31 dicembre 1915. — Premio di L. 10,000).

1. ANILE ANTONINO. « I problemi della biologia contemporanea » (ms.).
2. BAGLIONI SILVESTRO. « Contributi sperimentali di fisiologia comparata » (st.).
3. GALEOTTI GINO. « Ricerche di biologia » (st.).
4. GOLA GIUSEPPE. 1) « Ricerche sui rapporti tra i tegumenti semi-nali e le soluzioni saline » (st.). — 2) « Ricerche sulla biologia e sulla fisiologia dei semi a tegumento impermeabile » (st.). — 3) « Sull'attività respiratoria di alcuni semi durante il periodo della quiescenza » (st.). —

4) « Sulla respirazione intramolecolare nelle piante palustri » (st.). — 5) « Studi sulla funzione respiratoria nelle piante acquatiche » (st.). — 6) « Sulla presenza, nelle piante, di composti ematoidi di ferro » [Note 2] (st.). — 7) « Studi sui rapporti tra la distribuzione delle piante e la costituzione fisico-chimica del suolo » (st.). — 8) « Saggio di una teoria osmotica dell'edafismo » (st.). — 9) « Osservazioni sopra i liquidi circolanti nel terreno agrario » (st.). — 10) « Il terreno forestale » (st.). — 11) « La vegetazione dell'Appennino piemontese » (st.). — 12) « Di alcune pubblicazioni pedologiche sui terreni libici » (st.).

5. GORINI COSTANTINO. « Ricerche di microbiologia » (17 lavori st.).

6. LOMONACO DOMENICO. 1) « Su una reazione generale degli amino-acidi nell'organismo animale: contributo alla scomposizione delle sostanze proteiche e alla formazione dell'urea » (st.). — 2) « Sulla proprietà, che hanno i corpi solidi, di assorbire i gas [pneumofilia] » (ms.). — 3) « L'azione degli zuccheri sulla secrezione biliare » (ms.) [in collaborazione con lo studente laureando G. Silenzi].

7. LONGO BIAGIO. 1) « Acrogamia aporogama nel fico domestico [*Ficus carica* L.] » (st.). — 2) « Ricerche sul fico e sul caprifico » (st.). — 3) « Osservazioni e ricerche sul *Ficus carica* L. » (st.). — 4) « Su la presunta esistenza del micropilo nel *Ficus carica* L. » (st.). — 5) « Sul *Ficus carica* » (st.). — 6) « Ancora sul *Ficus carica* » (st.). — 7) « Di nuovo sul *Ficus carica* L. » (st.). — 8) « Recensione di un lavoro del Tischler » (st.). — 9) « Osservazioni e ricerche sulla nutrizione dell'embrione vegetale » (st.). — 10) « Nuove ricerche sulla nutrizione dell'embrione vegetale » (st.). — 11) « Ricerche sulle *Impatiens* » (st.). — 12) « La partenocarpia nel *Diospyros virginiana* L. » (st.). — 13) « La partenocarpia nello *Schinus molle* L. » (st.). — 14) « Su la nespola senza noccioli » (st.). — 15) « Sulla presunta esistenza delle loggie ovariche nella nespola senza noccioli » (st.). — 16) « Ricerche sopra una varietà di *Crataegus Azarolus* L. ad ovuli in gran parte sterili » (st.). — 17) « Note di partenocarpia » (st.). — 18) « Ricerche su la *coriaria myrtifolia* L. » (st.). — 19) « La poliembryonia nello *Xanthoxylum Bungei* Planch. senza fecondazione » (st.). — 20) « Sul *Sechium edule* Sw. » (st.). — 21) « Altre osservazioni sul *Sechium edule* Sw. » (st.). — 22) « Variazione di gemma in una quercia » (st.). — 23) « Variazione nel *Cosmos bipinnatus* Cav. » (st.). — 24) « Su le Chimere vegetali » (st.). — 25) « Note di morfologia fiorale » (st.).

8. MORGERA ARTURO. 1) « Sulla glandula digitale degli *Scyllium* del golfo di Napoli » (st.). — 2) « A proposito d'una Nota del dott. Robinson *Sur la physiologie de l'appendice coecal: l'hormone du vermium* » (st.). — 3) « A proposito della funzione della glandula digitale degli *Scyllium* e di quella dell'appendice vermiforme dei mammiferi » (st.). — 4) « Ricerche sulla morfologia e fisiologia della glandula cecale [appendice digitale]

forme] degli *Scyllium*, e sulla funzione del processo vermiforme dell'uomo e dei mammiferi » (st.). — 5) « La funzione dei ciechi del pollo » (st.).

9. RUFFINI ANGELO. 1) « Di una nuova guaina [guaina sussidiaria] nel tratto terminale delle fibre nervose di senso nell'uomo » (st.). — 2) « Le espansioni nervose periferiche alla luce dell'analisi moderna » (st.). — 3) « Contributo alla conoscenza della autogenesi degli anfibî anuri ed urodeli » (st.). — 4) « Un metodo di reazione al cloruro d'oro per le fibre e le espansioni nervoso-periferiche » (st.). — 5) « Appunti di citologia intorno agli elementi ectodermici della gastrula negli anfibii urodeli » (st.). — 6) « Contributo alla conoscenza della ontogenesi degli anfibii urodeli ed anuri [Nota seconda] » (st.). — 7) « Riflessioni sulla Nota del dott. F. Tello: *La régénération dans les fuseaux de Kühne* » (st.). — 8) « La evoluzione termica e l'eliotropismo positivo durante lo sviluppo delle uova di *Bufo vulgaris* » (st.). — 9) « L'ameboidismo e la secrezione in rapporto con la formazione degli organi e con lo sviluppo delle forme esterne del corpo » (st.) — 10) « Di alcune rare anomalie nella *pars mastoidea* del temporale umano » (st.). — 11) « Sul muscolo interdigastrico di Bianchi e sull'aponeurosi soprajoidea od intermediojoidea; rarissimo caso di mancanza bilaterale del ventre anteriore del muscolo digastrico della mandibola » (st.). — 12) « Di una singolare anomalia della staffa in un cranio di feto umano » (st.). — 13) « Ricerche anatomiche ed anatomo-comparate sullo sviluppo della *pars periottico-mastoidea* del temporale. e sul significato dell'apofisi mastoide » (st.). — 14) « L'origine, la sede e le differenziazioni dell'abbozzo del sangue e dei vasi sanguigni nel blastoderma di pollo » (st.).

10. RUSSO ACHILLE. 1) « Il ciclo di sviluppo del *Cryptochilum Echini Maupas* » (ms.). — 2) Album di tavole illustrate (ms.). — 3) « Materiali per lo studio delle reti a strascico nel golfo di Catania » (ms.).

11. SILVESTRI FILIPPO. 1) « Embriologia degli insetti » [cinque opuscoli] (st.). — 2) « Nuovi ordini di insetti » [tre opuscoli] (st.). — 3) « Tisanuri » [25 opuscoli] (st.). — 4) « Termiti e termitofili » [14 opuscoli] (st.). — 5) « Embioptera: Embiidae » [2 opuscoli] (st.). — 6) « Emitteri: Coccidi » [2 opuscoli] (st.). — 7) « Coleotteri: morfologia e biologia » [2 opuscoli] (st.). — 8) « Imenotteri » [2 opuscoli] (st.). — 9) « Mirmecofili » [3 opuscoli] (st.). — 10) « Entomologia agraria » [19 opuscoli] (st.). — 11) « Aracnidi » [2 opuscoli] (st.). — 12) « Miriapodi » [17 opuscoli] (st.).

12. STERZI GIUSEPPE. 1) « Morfologia e sviluppo della regione infundibolare e dell'ipofisi nei petromizonti » (st.). — 2) « Intorno alla struttura dell'ipofisi nei vertebrati » (st.). — 3) « Sulla *regio parietalis* dei ciclostomi, dei selacii e degli olocefali » (st.) — 4) « Il sacco endolinfatico: ricerche anatomiche ed embriologiche » (st.). — 5) « I progressi della nevrologia » (st.). — 6) « Intorno allo sviluppo del tessuto nervoso nei selaci » (st.). — 7) « Lo sviluppo della scissura interemisferica ed il significato del terzo ven-

tricolo » (st.). — 8) « Intorno alle menigi midollari ed al legamento denticolato degli ofidi » (st.). — 9) « Sullo sviluppo delle arterie centrali della midolla spinale del bulbo e del ponte » (st.). — 10) « Il significato anatomico dell'encefalo e del cervello dell'uomo » (st.). — 11) « Anatomia del sistema nervoso centrale dell'uomo » (st.). — 12) « I vasi sanguiferi della midolla spinale » (ms.). — 13) « Giulio Casseri anatomo e chirurgo [1552-1616]: ricerche storiche » (st.). — 14) « Le *Tabulae anatomicae* ed i codici marciani, con note autografe di *Hieronymus Fabricius ab Aquapendente* » (st.). — 15) « *Josephus Struthius*, lettore nello Studio di Padova » (st.) — 16) Il merito di L. Botallo nella scoperta del forame ovale » (st.). — 17) « Il tessuto sottocutaneo (*tela subcutanea*) » (st.).

Elenco dei lavori presentati ai concorsi ai premî
del Ministero della Pubblica Istruzione, per le *Scienze matematiche*.

(Scadenza 31 dicembre 1915 — Due premî, di L. 2000 ciascuno).

1. BOTTASSO MATTEO. 1) « Sulla determinazione del tasso di una rendita temporanea variabile e continua » (st.). — 2) « Sopra alcune estensioni di teoremi di Guldino » (st.). — 3) « Sopra alcune formule di quadratura usata in attuaria » (st.). — 4) « Sull'operatore differenziale binario S » (st.). — 5) « Alcuni complementi ad una recente Memoria di É. Picard » (st.). — 6) « Sopra l'equilibrio astatico e sull'equivalenza di due sistemi astatici » (st.). — 7) « Sistemi astatici equivalenti a due forze astaticamente irriducibili » (st.). — 8) « Sugli assi d'equilibrio e sulla stabilità ed instabilità dell'equilibrio nei sistemi astatici » (st.). — 9) « Astaticque » (st.). — 10) « Sopra un nuovo problema dei valori al contorno per un cerchio » (st.). — 11) « Sull'equilibrio delle piastre elastiche piane appoggiate lungo il contorno » (st.). — 12) « Sur une enveloppe de droites » (st.). — 13) « Sulla flessione delle superficie inestendibili » (st.). — 14) Burali-Forti C. et Marcolongo R., *Analyse vectorielle générale* (recensione) » (st.).

2. CHERUBINO SALVATORE. 1) « Sopra un teorema della teoria dei moduli di forme algebriche » (st.). — 2) « Sopra una questione didattica » (st.). — 3) « Sulle curve iperellittiche con trasformazioni birazionali singolari in sè e sui loro moduli algebrici » (st.). — 4) « Sulle curve iperellittiche con trasformazioni birazionali di 2^a specie in sè » (st.). — 5) « Sulle curve e sulle superficie algebriche con uno speciale tipo di trasformazioni birazionali in sè » (st.). — 6) « Sulle curve e sulle superficie algebriche ammettenti un gruppo finito e ridotto di semiproiettività di 1^a e 2^a specie in sè » (st.). — 7) « Sopra un metodo di postulazione » (st.). — 8) Identità ed autoidentità semiproiettiva ridotta di due forme algebriche ad $n+1$ variabili (Note I e II) » (ms.).

3. MARLETTA GIUSEPPE. 1) « Sui complessi di rette dell' S_4 , d'ordine 2 e di 4^a specie, e in particolare su quella di classe 4 » (st.). — 2) « Sul complesso di rette dell' S_4 , di 4^a specie, d'ordine 2 e di classe 4 » (st.). — 3) « Sulle superficie algebriche con infinite coniche, e, in particolare, su quelle d'ordine 5 » (st.). — 4) « Sulle superficie algebriche d'ordine 6 con infinite coniche » (st.). — 5) « Delle superficie algebriche con infinite coniche » (st.). — 6) « Le superficie algebriche d'ordine 6 con infinite coniche » (st.).

4. NALLI PIA. 1) « Sopra una nuova specie di convergenza in media » (st.). — 2) « Aggiunta alla Memoria *Sopra una nuova specie di convergenza in media* » (st.). — 3) « Esposizione e confronto critico delle diverse definizioni proposte per l'integrale definito di una funzione limitata o no » (st.). — 4) « Sulle derivate seconde generalizzate e sugli sviluppi in serie trigonometriche delle funzioni integrabili secondo Denjoy » (st.). — 5) « Sulla serie di Dirichlet » (st.). — 6) « Sulle serie di Fourier delle funzioni non assolutamente integrabili » (st.).

5. PUCCIANO GIUSEPPE. 1) « I principî dell'ordinamento naturale e della continuità » (st.). — 2) « Introduzione alla teoria generale delle grandezze lineari, finite, non finite e continue » (st.).

6. ROSATI CARLO. 1) « Sulle assintotiche della superficie di Kummer » (st.). — « Sulle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica » (st.). — 3) « Sugli integrali abeliani riducibili » (st.). — 4) « Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica, e, in particolare, fra i punti di una curva di genere due » (st.).

Concorso al premio di Fondazione *Santoro*.

(scaduto col 31 dicembre 1915).

Elenco dei lavori sui quali venne richiamata l'attenzione dell'Accademia dai seguenti concorrenti:

1. GORINI COSTANTINO. « Ricerche batteriologiche sui foraggi conservati nei *silos* » (sette Relazioni) (st.).

2. MARCHESE DE' LUNA G. 1) « Liquidazione d'indennità per gli infortuni sul lavoro » (st.). — 2) « Le concuse in tema d'infortunio » (st.). — 3) « Influenza delle malattie, preeistenti agli infortunî, sulla misura della indennità » (st.). — « Misura della guaribilità ed indennità relativa dei morbi dipendenti da infortunio sul lavoro » (st.). — 5) « Per la calcolazione della capacità lavorativa in tema d'infortunio sul lavoro » (st.). — 6) « La simulazione in tema d'infortunî sul lavoro » (st.). — 7) « Per la liquidazione

della parziale temporanea da infortunio sul lavoro » (st.) — 8) « Nevrosi da trauma » (st.).

3. MARTINOTTI LUIGI. « Il ritorno alla vita » (ms.).
4. MAZZA EDOARDO. « Sulla forza centrifuga » (ms.).
5. PORCARI GABRIELE. « Sulla sicurezza ed il perfezionamento delle navi e degli aerostati » (ms.).
6. VECCELLIO ALESSANDRO. « L'equilibrio nel mondo fisico » (ms.).

E. M.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL' ACCADEMIA
presentate nella seduta del 6 febbraio 1916.

AMEGHINO C. — Sur un fémur de «Toxodon chapalmalensis» du Tertiaire de Miramar, portant une pointe de quartzite introduite par l'homme (présentée par le Président, accompagnée d'un mouillage). s. l. nec d. f. vol.

CORDARO G. — L'inesistenza dell'etere negli spazi dell'universo, e nuova teoria sulla luce. Caltanissetta, 1913. 8°.

FOSSA - MANCINI E. — La presenza del pliocene nella collina di Rosora, in provincia di Ancona. (Estr. dagli « Atti della Società toscana di scienze naturali », vol. XXIV). Pisa, 1909. fol.

FOSSA - MANCINI E. — Lias e Giura nella montagna della Rossa. (Estr. dagli « Atti della Società toscana di scienze naturali », vol. XXX). Pisa, 1915. 8°.

FOSSA - MANCINI E. — Note di ammonitologia. I. Le ammoniti dell'alta Brianza descritte e figurate da H. Rassmuss. Parma 1915. 8°.

FOSSA - MANCINI E. — Osservazioni critiche sugli « Hammatoceras ». (Estr. dai « Processi verbali della Società toscana di scienze naturali », vol. XXIII). Pisa, 1915. 8°.

FOSSA - MANCINI E. — Qualche nuova osservazione sulla grotta di Vernino.

(Estr. dal « Mondo sotterraneo. Rivista di speleologia e idrologia », an. X). Udine, 1915. 8°.

LEGRAND L. — La sélection du plasma spécifique. Esquisse d'une théorie cytomécanique et cytochimique de la vié. Paris, 1916. 8°.

MERLAC A. H. — De la création des planètes. Toulouse, 1915. 8.

MIELI A. — Le scuole ionica, pythagorica ed aleata. (I prearistotelici, I). Firenze, 1916. 8°.

PASCAL E. — I miei integrati per equazioni differenziali. Napoli, 1914. 8°.

PEANO G. — L'esecuzione tipografica delle formule matematiche. (Estr. dagli « Atti della R. Accad. delle scienze di Torino », vol. 51). Torino, 1915. 8°. Rendiconti delle Sedute dell'anno accademico 1914-1915. (Seminario matemat. della Facoltà di scienze della R. Università di Roma). Roma, 1915. 8°.

TANK F. — Ueber den Zusammenhang der dielektrischen Effektverluste von Kondensatoren mit den Anomalien der Ladung und der Leitung. Leipzig, 1915. 8°.

Tavole Nautiche raccolte e pubblicate per cura dell' Istituto idrografico della Regia Marina. Genova, 1915. 8°.